Bac SMS : Mathématiques – Métropole – Juin 2006

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.
Une feuille de papier millimétré est nécessaire pour le problème.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE (8 points)

Questionnaire à choix multiple :

Cocher les bonnes réponses, il y en a au moins une par question. *Toute bonne réponse rapporte 1 point, toute erreur retire 0,5 point, l'absence de réponse ne retire rien.*
Si le total des points est négatif, la note de l'exercice sera ramenée à zéro.

1) Soient A et B deux événements tels que leurs probabilités vérifient : $P(A) = P(B) = 0,2$ et $P(A \cap B) = 0,1$. Alors $P(A \cup B)$ est égal à :

☐ 0,2 ☐ 0,3 ☐ 0,4 ☐ 0,5

2) La fonction f définie sur $[1\ ;12]$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 4}{x}$ a pour dérivée la fonction f' telle que $f'(x) =$:

☐ $-1 + \dfrac{4}{x^2}$ ☐ $\dfrac{4 - x^2}{x^2}$ ☐ $\dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ ☐ $\dfrac{-2x + 3}{1}$

3) On considère la fonction logarithme népérien notée ln.
$\ln 27$ est égal à :

☐ $3 \ln 3$ ☐ $9 \ln 3$ ☐ $27 \ln 1$ ☐ $\ln 9 + \ln 3$

4) On considère la fonction f définie sur $[0,5\ ;12]$ par $f(x) = 2 \ln x$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Le coefficient directeur de la tangente à C au point d'abscisse 4 est :

☐ $2 \ln 4$ ☐ 0 ☐ 0,25 ☐ 0,5

5) Dans un classe de 20 élèves, 15 sont des filles, et il y a 8 élèves qui portent des lunettes. Par ailleurs un tiers des filles portent des lunettes.
On prend un élève au hasard.

a. la probabilité que cet élève soit une fille est de :

☐ $\dfrac{1}{15}$ ☐ 0,75 ☐ 0,125 ☐ 0,067 environ

b. la probabilité que ce soit un garçon et qu'il porte des lunettes est de :

☐ 0,6 ☐ 0,15 ☐ 0,4 ☐ 0,5

PROBLÈME (12 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;7]$ par $f(x) = 12 + 3x - e^{0,5x}$.

1) **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x) = 3 - 0,5e^{0,5x}$.

b. Résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2) Recopier et compléter le tableau suivant (arrondir les résultats à 0,1 près) :

x	0	1	2	3	$2\ln 6$	4	5	6	7
$f(x)$		13,4				16,6	14,8	9,9	

3) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal;
unités : 2 cm pour une unité en abscisses et 1 cm pour une unité en ordonnées.

Partie B

On introduit une substance S dans un liquide contenant un certain type de micro-organismes afin d'en stopper la prolifération.
On suppose que le nombre (en millions) de micro-organismes présents au bout du temps x (en heure) écoulé depuis l'introduction de la substance S est donné par l'expression :

$$f(x) = 12 + 3x - e^{0,5x}.$$

1) Quel est le nombre de micro-organismes au bout d'une heure? au bout d'une heure et trente minutes? (Arrondir les résultats à 100 000 près)

2) Au bout de combien de temps la population est-elle maximale? Quelle est cette population maximale?

3) Déterminer graphiquement durant combien de temps la population est supérieure ou égale à 12 millions (laisser apparents les traits de construction).

Bac SMS : Mathématiques – Antilles-Guyane – Juin 2006

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.
Une feuille de papier millimétré est nécessaire pour le problème.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE (8 points)

Une maladie atteint 3% d'une population de 30 000 habitants. On soumet cette population à un test.
– parmi les bien portants, 2% ont un test positif ;
– parmi les individus malades, 49 ont un test négatif.

1) Reproduire puis compléter le tableau suivant :

	Malades	Bien portants	Total
Test positif			
Test négatif			
Total			30 000

Dans les questions suivantes, les résultats numériques demandés seront donnés à 10^{-3} *près.*

2) On choisit au hasard un individu de cette population. On considère les événements T et M suivants :
– T : « le test est positif pour l'individu choisi » ;
– M : « l'individu choisi est malade ».

a. Calculer la probabilité de chacun des événements T et M.

b. Définir par une phrase l'événement $\overline{T}$ et calculer sa probabilité.

c. Définir par une phrase chacun des événements $M \cup T$ et $\overline{M} \cap T$.

d. Calculer les probabilités des événements $M \cup T$ et $\overline{M} \cap T$.

3) On décide d'hospitaliser tous les individus qui ont un test positif. On choisit au hasard un individu hospitalisé. Quelle est la probabilité qu'il soit bien portant ?

PROBLÈME (12 points)

Partie A : *Etude et représentation graphique d'une fonction*

On appelle f la fonction numérique de variable réelle définie sur $[0\,;5]$ par $f(t) = te^{2-t}$.

1) Calculer $f'(t)$ et vérifier que $f'(t) = (1-t)e^{2-t}$.

2) **a.** Etudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;5]$.

b. Dresser le tableau de variation de f (*dans ce tableau ne figureront que des valeurs exactes*).

3) Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs suivant (*les valeurs seront données sous forme décimale arrondie à 0,01 près*) :

t	0	1	2	3	4	5
$f(t)$				1,10		

4) Tracer la courbe représentative de la fonction f sur une feuille de papier millimétré, dans un repère orthonormé d'unité 3 centimètres.

Partie B : *Application : étude de la concentration d'un médicament dans le sang d'un malade en fonction du temps.*

A l'instant $t = 0$, un malade absorbe un médicament. On admet que la concentration de celui-ci dans le sang, exprimée en mg.L^{-1}, en fonction du temps t exprimé en heures est donnée par la fonction f étudiée dans la partie A.

1) A quel instant la concentration du médicament est-elle maximale ? Quelle est cette concentration maximale ? (donner sa valeur exacte puis son approximation décimale à 0,01 mg.L^{-1} près).

2) Dans cette question, on fera apparaître sur le graphique tous les tracés utiles.

a. Déterminer graphiquement au bout de combien de temps la concentration dans le sang redevient inférieure à 1 mg.L^{-1}.

b. Déterminer graphiquement le temps pendant lequel la concentration dans le sang est supérieure à 2 mg.L^{-1}.

Bac SMS : Mathématiques – La Réunion – Juin 2006

L'usage des calculatrices et des instruments de calcul est autorisé.
Une feuille de papier millimétré est nécessaire pour le problème.
Le formulaire officiel de mathématiques est joint au sujet.

EXERCICE (8 points)

Le tableau suivant, extrait du dernier recensement de l'INSEE, présente des données concernant le département du Nord et ses 6 arrondissements. Il porte sur le nombre de naissances observées dans ce département, et parmi elles, précise le nombre de nouveaux-nés bénéficiant d'un allaitement, et le nombre de mères n'ayant pas subi la totalité des 7 consultations prénatales normalement prévues.

	Nom de la Zone	Nombre de naissances	Nombre de nouveaux-nés bénéficiant d'un allaitement	Nombre de naissances dont la mère a bénéficié de moins de 7 consultations prénatales
ARRONDISSEMENT	AVESNES-SUR-HELPE	3 210	1 226	371
	CAMBRAI	2 194	864	379
	DOUAI	3 395	1 379	364
	DUNKERQUE	5 026	1 921	488
	LILLE	17 967	9 818	2 092
	VALENCIENNES	4 881	2 163	608
DEPARTEMENT DU NORD	**TOTAL**	**36 673**	**17 371**	**4 302**

1) **a.** On sait par ailleurs que 7,29% des nouveaux-nés de Cambrai étaient de « petit poids », c'est-à-dire avaient un poids de naissance inférieur à 2500 grammes. Déterminer le nombre de ces nouveaux-nés de « petit poids » en arrondissant à l'unité.

b. Les nouveaux-nés de « petit poids » de Cambrai représentent 6,14% de tous les nouveaux-nés de « petit poids » du département du Nord. Calculer le nombre des nouveaux-nés du Nord qui sont de « petit poids » (*on arrondira à 1 près*).

Dans les questions suivantes, les résultats seront donnés sous forme décimale arrondie à 0,001 près.

2) On choisit au hasard un nouveau-né dans le département du Nord. On considère les événements suivants :
– A : « le nouveau-né bénéficie d'un allaitement » ;
– D : « le nouveau-né est né dans l'arrondissement de Dunkerque ».

a. Calculer la probabilité de chacun des événements A et D.

b. Définir par une phrase l'événement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité.

c. Définir par une phrase l'événement $\overline{A} \cap D$ et calculer sa probabilité.

d. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{A} \cup D$.

3) On choisit maintenant au hasard un nouveau-né du département du Nord dont la mère n'a pas bénéficié des 7 consultations prénatales. Quelle est la probabilité qu'il soit né à Lille ?

PROBLÈME (12 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ par $f(t) = 30e^{-0,4t}$

1) **a.** Calculer $f'(t)$.

b. Etudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.

c. En déduire le tableau de variations de f (dans ce tableau n'apparaîtront que des valeurs exactes).

2) Reproduire et compléter le tableau suivant en donnant les résultats arrondis à 0,1 près :

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5
$f(t)$			20,1		13,5		9		

3) Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal en prenant pour unités graphiques :

- 2 cm pour 1 unité sur l'axe des abscisses.
- 0,5 cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.

Partie B

On dissout 30 kg de sucre dans de l'eau. A chaque instant t, exprimé en heures, on note $y(t)$ la quantité, exprimée en kg, de sucre non encore dissous. On admet que la fonction y est solution de l'équation différentielle $y' = -0,4y$.

1) **a.** Résoudre l'équation différentielle $y' = -0,4y$.

b. Trouver la solution telle que $y(0) = 30$ puis vérifier que cette solution est la fonction f de la partie A.

2) Utiliser la partie A pour déterminer graphiquement, en faisant apparaître les traits de construction utiles :

a. Au bout de combien de temps on aura 50% de la quantité de sucre dissoute.

b. Le temps pendant lequel la quantité de sucre dissous représente moins de 40% de la quantité initiale.

3) Retrouver le résultat de la question 2)a. en résolvant une équation. On donnera la valeur exacte de la solution puis une valeur approchée à 0,1 près.