Programme de colle Triangle

Classe de PT

Lycée La Martinière

Exercice 1 (Droite et cercle d'Euler d'un triangle)
Soit ABC un triangle non isocèle. A', B' et C' sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC (on appellera O son centre). Soit H l'orthocentre et G le centre de gravité de ABC. Le but de ce problème est de démontrer que les points O, H et G sont alignés.

1) Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathscr{C}$.
- **a)** De quelle nature sont les triangles ACD et ABD ? Justifier.
- **b)** Démontrer que les droites (BH) et (CD) sont parallèles, tout comme (CH) et (BD).
- **c)** En déduire que A' est le milieu de $[HD]$.

2)
- **a)** Que représentent les droites (HO) et (AA') pour le triangle AHD ?
- **b)** En déduire que les points O, H et G sont alignés.

La droite (OH) est appelée « **droite d'Euler** du triangle ABC », du nom du mathématicien suisse Léonhard Euler, 1707-1783.

3) Soit L le milieu de $[AH]$, M celui de $[BH]$,N celui de $[CH]$ et enfin E celui de $[OH]$.
- **a)** Démontrer que $OLHA'$ est un parallélogramme. En déduire que E est le milieu de $[LA']$.
- **b)** Comparer les longueurs LA' et AD.
- **c)** Tracer le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre E et de rayon EA'. Constater qu'il passe par les points B', C', L, M, N ainsi que par les pieds I, J, K des trois hauteurs du triangle ABC.
- **d)** Comparer les rayons des cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$.

Ce cercle est appelé « **cercle d'Euler** » ou « cercle des 9 points » du triangle ABC.

Exercice 2 (Orthogonalité)
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O, $[AB]$ en est un diamètre. M est un point de $\mathscr{C}$, et R un point de $[OA]$. La perpendiculaire à (AB) menée par R coupe (AM) en P et (BM) en Q. On note I l'intersection de (BP) et (AQ). Démontrer que (BP) et (AQ) sont perpendiculaires, et que I est un point du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 3 (Mesures d'angles)
Soit ABC un triangle. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC ; on suppose que $\widehat{AIB} = \dfrac{3\pi}{4}$.
Montrer que le triangle ABC est rectangle en C, et calculer la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$.

Exercice 4 (Aires)
Soit ABC un triangle quelconque, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, et G son centre de gravité. Montrer que les aires des six petits triangles (GBA', $GA'C$, GCB', $GB'A$, GAC' et $GC'B$) sont égales.