

# Programme de colle Réels

Classe de MPSI

Lycée du Parc

## Exercice 1 (morphismes d'anneaux)

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  un morphisme d'anneaux non nul.

- 1) Calculer  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puis  $\mathbb{Z}$ , puis  $\mathbb{Q}$ .
- 2) Montrer que  $x \geq 0$  entraîne  $f(x) \geq 0$  (dans  $\mathbb{R}$ , tout positif est un carré).
- 3) En déduire  $f$  croissante, puis  $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

## Exercice 2 (ddl)

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$ .

## Exercice 3 (ddl) $\sqrt{2}$

Calculer  $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ . En déduire (par un raisonnement conditionnel) qu'il existe  $a, b > 0$  irrationnels tels que  $a^b$  soit rationnel.

## Exercice 4 (ddl)

Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = E(\sqrt{4n+2})$ .

## Exercice 5

- 1)