# Programme de colle Courbes

Classe de MPSI

Lycée du Parc

**Exercice 1 (PT 2006 — Partie A)**
On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble d'équation

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

**1)** Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ ? Donner un paramétrage de $\mathscr{E}$.

$$x(t)=3\cos t \qquad \text{et} \qquad y(t)=2\sin t$$

**2)** Déterminer le repère de Frenet de cet arc au point $M(t)$, puis le rayon de courbure en ce point.

**3)** En déduire les coordonnées du centre de courbure de $\mathscr{E}$ associé au point $M(t)$.

**4)** On désigne par $\Gamma$ l'arc paramétré comme suit ($t \in \mathbb{R}$) :

$$x(t)=\frac{5}{3}\cos^3 t \qquad \text{et} \qquad y(t)=-\frac{5}{2}\sin^3 t$$

$\Gamma'$ est l'arc de $\Gamma$ correspondant à $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. En étudiant les fonctions $x$ et $y$, construire avec soin $\Gamma'$ ; on précisera les tangentes aux extrémités de $\Gamma'$.

**5)** Par quelles transformations géométriques déduit-on la construction de $\Gamma$ de celle de $\Gamma'$ ? Construire $\Gamma$ sur la même figure.

**Exercice 2**
Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

**1)** Soit $\Gamma$ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\,\mathrm{ch}\,(t) \\ y(t) & = & 3\,\mathrm{sh}\,(t) \end{array}\right.$$

**a)** Montrer que $\Gamma$ est une portion de conique dont on précisera la nature et l'excentricité.

**b)** Former une équation cartésienne de chacune des asymptotes de $\Gamma$. Tracer proprement la courbe $\Gamma$ et ses asymptotes.

**2)** On note $\Gamma'$ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto C(t)$ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \frac{13}{2}\,\mathrm{ch}^3(t) \\ y(t) & = & -\frac{13}{3}\,\mathrm{sh}^3(t) \end{array}\right.$$

**a)** Montrer que $\Gamma'$ possède un axe de symétrie.

**b)** Étudier la courbe $\Gamma'$ au point $C(0)$.

**c)** Étudier les branches infinies de $\Gamma'$ et comparer leurs directions à celles des asymptotes de $\Gamma$.

**d)** Tracer $\Gamma'$ sur la même figure que $\Gamma$.

**e)** Montrer les relations

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ch}\,(2t) & = & \mathrm{ch}^{2}(t)+\mathrm{sh}^{2}(t)=2\,\mathrm{ch}^{2}(t)-1=2\,\mathrm{sh}^{2}(t)+1 \\ \mathrm{sh}\,(2t) & = & 2\,\mathrm{sh}\,(t)\,\mathrm{ch}\,(t) \end{array}$$

En déduire la longueur $\displaystyle\int_0^1 \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OC}}{\mathrm{d}t}\|\,\mathrm{d}t$ de l'arc $\Gamma'$ entre $t=0$ et $t=1$.

**Exercice 3**
Pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\Gamma_k$ d'équation polaire $\rho = e^{k\theta}$.

**1)** Déterminer l'angle entre la tangente en $M$ et $(OM)$.

**2)** Développée. Transformation permettant d'obtenir la développée à partir de $\Gamma_k$.

**3)** Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de $k$, toutes situées dans $]0,1[$, pour lesquelles la courbe $\Gamma_k$ est confondue avec sa développée.

**4)** Trouver les courbes $\mathscr{C}^1$ telles que la tangente en $M$ fasse un angle de $\pi/4$ avec $\overrightarrow{OM}$ en tout point $M$ de la courbe.

**Solution.**

**1)** PT.

**2)** Se placer en polaire, trouver une équa. diff. que vérifiée par $\rho$. On trouve $\rho = \lambda e^{\theta}$.

□

**Exercice 4**
Soit $\Gamma$ la courbe ayant pour représentation paramétrique

$$x(t) = t + \sin t - 4\sin\frac{t}{2} \qquad \text{et} \qquad y(t) = 3 + \cos t - 4\cos\frac{t}{2} \qquad t \in [0, 4\pi]$$

**1)** Construire $\Gamma$.

**2)** Expliciter une abscisse curviligne sur $\Gamma$. Calculer la longueur totale de $\Gamma$.

**3)** Pour $t \in ]0, 4\pi[$, préciser le repère de Frenet et le rayon de courbure de $\Gamma$ au point de paramètre $t$.

**4)** Construire la développée de $\Gamma$.