Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2008/2009

Semaine 17
9 février 2009

1 Polynômes

1.1 La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}[X]$.

Construction de $\mathbb{K}[X]$, opérations dans $\mathbb{K}[X]$, structure de $\mathbb{K}$-algèbre. Définition du degré d'un polynôme, sous espace vectoriel$\mathbb{K}_n[X]$. Définition du polynôme X, notations usuelles.

1.2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.

Divisibilité, division euclidienne, PGCD de deux polynômes, algorithme d'Euclide, polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout, PPCM de deux polynômes. L'arithmétique a été abordée de façon formelle comme arithmétique dans un anneau euclidien...

1.3 Racines d'un polynôme.

Fonction polynôme associée à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, l'application $\Phi : P \mapsto \overline{P}$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre. Racine d'un polynôme, si $a_1, \dots, a_k$ sont k racines distinctes de P alors $(X - a_1) \dots (X - a_k)$ divise P . Injectivité de Φ lorsque $\mathbb{K}$ est infini.

1.4 Formule de Taylor.

Formule de Taylor pour les polynômes. Racine multiple d'un polynôme, notion de multiplicité d'une racine. Théorème : $a \in \mathbb{K}$ est racine de P de multiplicité α si et seulement si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(\alpha-1)}(a) = 0 et P^{(\alpha)}(a) \neq 0$.

1.5 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Polynôme irréductible, tout polynôme se décompose de manière unique comme produit de polynômes irréductibles unitaires. Théorème de d'Alembert-Gauss (démonstration hors-programme), les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1. Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

1.6 Relations entre racines et coefficients.

Polynôme scindé, fonctions symétriques élémentaires, relations entre racines et coefficients.

2 Petits

Exercice 1
$2X^3 - X^2 - X - 3$. Racines dans $\mathbb{Q}$, racines dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2
Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $4iz^3 + 2(1 + 3i)z^2 - (5 + 4i)z + 3(1 - 7i) = 0$, en commençant par chercher les racines réelles.

Solution. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ alors $\Re(P(x_0)) = \Re(P)(x_0)$. De plus $\Re(P)$ est de degré 2 avec moult racines évidentes. □

Exercice 3
$P = X^5 - X^2 + 1$.

1. Montrer que P n'a pas de racines rationnelles.
2. Montrer que P a une unique racine réelle.

Solution.

1. Remplacer X par p/q irréductible, multiplier par q^5 et conclure.
2. Variation de fonctions.

$\square$

Exercice 4

1.

Solution.

$\square$

3 Gros

4 Impairs