Lycée Louis le grand
Mathématiques Supérieure MPSI

Année scolaire 2008/2009

Semaine 9
26 novembre 2009

1 Programme de Colles : Récurrence et dénombrement.

La construction de $\mathbb{N}$ n'est pas au programme, on admet que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

1.1 Principe de récurrence.

Démonstration du principe, extensions : récurrence sur deux termes, récurrence forte.

1.2 Ensembles finis.

Définition d'un ensemble fini, cardinal. Toute partie d'un ensemble fini est finie de cardinal inférieur, cas d'égalité. Soit $f : E \to F$ où $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$, équivalence injectif et surjectif. Cardinal d'une réunion, d'un produit cartésien, de $\mathcal{F}(E, F)$.

1.3 Dénombrement.

Arrangements, combinaisons. Propriétés des combinaison, interprétations.

2 Petits

Exercice 1
On suppose que la relation « avoir serré la main » est irréflexive et symétrique, et que l'ensemble des personnes est fini. Montrer que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair.

Solution. $\sum_{p \text{ personnes}}$ (nombre de mains serrées par p) est pair (chaque poignée de mains implique deux personnes). On obtient le résultat en prenant cette égalité modulo 2 : les personnes qui ont serré un nombre pair de mains disparaissent, les autres interviennent à hauteur de 1 chacun et la somme doit être paire. □

Exercice 2
On suppose que la relation « être ami de » est réflexive et symétrique. Montrer que dans un ensemble fini de personne, il y en a forcément deux qui ont le même nombre d'amis.

Solution. On raisonne par l'absurde, en considérant la fonction $f : p \mapsto$ nombre d'amis de p. Si E est notre ensemble de départ, f est à valeur dans $\{1, \dots, \operatorname{Card} E\}$. Comme f est supposée injective et que les ensembles de départ et d'arrivée ont même cardinal fini, elle est bijective. Par conséquent il existe une personne qui n'a qu'elle même pour ami, et une personne qui est ami avec tout le monde, donc y compris la personne précédente : contradiction. □

Exercice 3
Montrer que pour tout n-uplet d'entier, il existe deux de ces entiers dont la différence est divisible par $n - 1$.

Solution. Il suffit d'appliquer le « principe des tiroirs » : si on considère les restes $r_1, \dots r_n$ de ces entiers par la division par $n-1$, il y a au plus $n-1$ valeurs possibles. Donc deux entiers x_i et x_j auront le même reste modulo $n-1$, par conséquent $x_i - x_j$ sera divisible par $n-1$. □

Exercice 4

1. Quel est le nombre de fonctions strictement croissantes de $\{1 \dots n\}$ dans $\{1 \dots m\}$?
2. Et de fonctions croissantes au sens large ?

Solution.

1. A toute partie à n éléments de $\{1 \dots m\}$ on peut associer une unique fonction strictement croissante (en rangeant les éléments par ordre croissant). Par conséquent le nombre de fonctions strictement croissantes de $\{1 \dots n\}$ dans $\{1 \dots m\}$ est C_n^m
2. Soit $S_{n,m}$ le nombre de fonctions croissantes. En distinguant suivant que $f(1) = 1$ ou $f(1) \geq 2$, nous obtenons la relation de récurrence suivante : $S_{n,m} = S_{n-1,m} + S_{n,m-1}$. Par conséquent $S_{n,m} = C_{m+n-1}^n$.

□

Exercice 5
Soient a, b, c, d quatre entiers tels que $ad \wedge bc = 1$. Montrer que $(am + bn) \wedge (cm + dn) = m \wedge n$.

Solution. □

Exercice 6
Trouver l'ensemble des couples (x, y) d'entiers tels que $x^y = y^x$, où $x \neq y$.

Solution. Passer au log et faire une étude de l'injectivité de la fonction. Il n'y a que le couple $(2, 4)$ (et $(4, 2)$) qui convient. □

3 Gros

Exercice 7
Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(f(n)) = n + 2009$.

Solution. Dans un premier temps, on montre que $f(n + 2009k) = f(n) + 2009k$. On en déduit une application $\overline{f}$ sur $\mathbb{Z}/2009\mathbb{Z}$ involutive, or $\mathbb{Z}/2009\mathbb{Z}$ a un nombre impair d'éléments : $\overline{f}$ a un point fixe. remonter à f et conclure. □

Exercice 8
Montrer que 1996 a un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 4.

Solution. Après simplification par 4, il faut montrer que 499 a un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 1, c'est-à-dire qu'il existe k tel que $\sum_0^{k-1} 10^i = (10^k - 1)/9 = 0[499]$. $9 \wedge 499 = 1$, donc l'égalité précédente équivaut à $10^k = 1[499]$, petit théorème de Fermat (vu que $10 \wedge 499 = 1$). □

Exercice 9
Soit $S = \frac{p}{q} = \sum_{k=1} 1319 \frac{(-1)^k}{k}$ (avec $p \wedge q = 1$). Montrer que $1979|p$.

Solution. Remarquons d'abord que 1979 est premier, donc on peut se placer dans $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$ pour calculer S.

Il n'y a pas d'élément d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$, donc $\sum_{k\in\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}} k = 0$. De plus $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$ est un corps, donc $x \mapsto 1/x$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z})^\times$, et on a aussi

$$\sum_{k=1}^{1978} \frac{1}{k} = 0$$

Il reste à faire le calcul, en remarquant que $1979 - 1320 = 659$.

$$S = S + \sum_{k=1}^{1978} \frac{1}{k} = 2\sum_{k=1}^{659} \frac{1}{2k} + \sum_{k=1320}^{1978} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{659} \frac{1}{k} + \sum_{k'=1}^{659} \frac{1}{-k'} = 0$$

On peut remplacer 1979 par n'importe quel p premier tel que $p-2$ soit divisible par 3. $\square$

Exercice 10

Trouver tous les coloriages des entiers strictement positifs en noir et blanc pour lesquels la somme de deux entiers de couleur différente est noire et que leur produit est blanc.

Solution. Tester sur des exemples. Les coloriages sont exactement de la forme $p.\mathbb{N}$ blanc et le reste noir. $\square$

Exercice 11

1. Montrer que, si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille de parties de E, alors on a :

$$\operatorname{Card} \bigcup_{k\in\{1,\ldots,n\}} A_k = \sum_{F\subset\{1,\ldots,n\}} (-1)^{\operatorname{Card} F - 1} \operatorname{Card} \bigcap_{k\in F} A_k$$

2. Déterminer la proportion des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui ont au moins un point fixe.
3. Déterminer le nombre moyen de point fixe d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$.

Solution.

1. Récurrence. Vérifier que l'on obtient bien toutes les parties de $\{1,\ldots,n+1\}$.
2. Utiliser la formule du crible avec $A_i = \{\sigma \mid \sigma(i) = i\}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Card} \bigcup_{k\in\{1,\ldots,n\}} A_k &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \operatorname{Card}(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} (n-k)! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k (n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!}
\end{aligned}$$

   Par conséquent la proportion cherchée est $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$ qui tend vers $1/e$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Un.

$\square$

Exercice 12

Soit φ_n la suite de Fibonacci définie par $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 1$ et $\varphi_{n+2} = \varphi_n + \varphi_{n+1}$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les égalités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_{n+2} - 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = \varphi_n \varphi_{n+1} \qquad \sum_{i=1}^{2n-1} \varphi_i \varphi_{i+1} = \varphi_{2n}^2 \qquad \sum_{i=1}^{E(n/2)} C_{n-i}^i = \varphi_{n+1}$$

2. Montrer que $\varphi_{n+m} = \varphi_m \varphi_{n+1} + \varphi_{m-1} \varphi_n$
3. En utilisant $\varphi_{n+1} \wedge \varphi_n = 1$ montrer que

$$\varphi_m \wedge \varphi_n = \varphi_{m \wedge n}$$

Solution.

1. Dans la dernière, montrer que la suite de gauche vérifie la même relation de récurrence et a les mêmes termes de départ (il faut faire un changement d'indices dans la somme).
2.
3. Montrer que $\varphi_{kn+r} \wedge \varphi_n = \varphi_r \wedge \varphi_n$, puis conclure par l'algorithme d'Euclide.

$\square$