Exercices : Surfaces

Exercice 1
Soit a, b, c trois réels strictement positifs. Déterminer les équations paramétriques de l'ellipsoïde d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$. <u>Indication</u> : *On pourra s'inspirer des équations paramétriques de la sphère.* En déduire l'aire de cet ellipsoïde.

Exercice 2
Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie par $\begin{cases} x &= z^2+2z \\ y &= z^2+z \end{cases}$.
Montrer que cette courbe est plane, puis que c'est une parabole.

Exercice 3 (Plans tangents)

1) Déterminer le plan tangent à la surface Σ_1 d'équations paramétriques $\begin{cases} x &= u^2 \\ y &= uv \\ z &= u+v \end{cases}$ au point $M(1,1)$.
   Expression à l'aide d'une intégrale de l'aire de la portion de surface correspondant à $(u,v)\in[0,1]^2$.
2) Déterminer les plans tangents à la surface Σ_2 d'équation $x^2+y^2+2z^2=1$ et perpendiculaires à la droite $\mathscr{D}$ d'équations $x=\dfrac{y}{2}=-\dfrac{z}{2}$.
3) Déterminer les plans tangents à la surface Σ_3 d'équation $xy=z^3$ contenant la droite $\mathscr{D}$ d'équations $x=2$ et $y=3z-3$.
4) Les points de la surface Σ_4 d'équation $x^2-y^2+z^2=1$ dont le plan tangent est parallèle à Π d'équation $2x+y-z=0$.

Exercice 4

1) Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie par $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ z+y &= 1 \end{cases}$.
   a) Projections sur chacun des plans de coordonnées.
   b) Déterminer un paramétrage cartésien de $\mathscr{C}$ après avoir effectué le changement de base
   $$\overrightarrow{I}=\overrightarrow{\imath} \qquad \overrightarrow{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{\jmath}-\overrightarrow{k}) \qquad \overrightarrow{K}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{\jmath}+\overrightarrow{k})$$
2) Soit $\mathscr{C}$ la courbe définie par $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 1 \\ x^2-x+y^2 &= 1 \end{cases}$. Projections sur chacun des plans de coordonnées.

Exercice 5 (cylindres)

1) Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée $\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= t+1 \\ z &= t^2-t+1 \end{cases}$.
   a) Montrer que $\mathscr{C}$ est plane[1]. On donnera un vecteur normal $\overrightarrow{u}$ au plan contenant $\mathscr{C}$.
   b) Déterminer l'équation cartésienne du cylindre Σ_1 de section droite $\mathscr{C}$, c'est-à-dire de directrice $\mathscr{C}$ et de direction normale au plan contenant $\mathscr{C}$.
2) Équation cartésienne du cylindre Σ_2 de directrice $\mathscr{C}$ $\begin{cases} x^2+y^2 &= z^2 \\ 2x-y+z &= 3 \end{cases}$ et de direction $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$
3) Équation cartésienne du cylindre Σ_3 de directrice $\mathscr{C}$ $\begin{cases} x^2-2y &= 0 \\ x+y-2z+2 &= 0 \end{cases}$ et de direction $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$
4) Équation cartésienne du cylindre Σ_4 circonscrit à la surface $x^4+y^4+z^4=1$ et de direction $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

1. On remarquera au passage que toute courbe paramétrée définie par des polynômes de degré au plus 2 est contenue dans un plan.

Exercice 6 (cônes)

1) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(tx) = t^k f(x)$. Montrer que Σ_1 d'équation $f(x) = 0$ est un cône. (vocabulaire : f est dite homogène de degré k).

2) Équation cartésienne du cône Σ_2 de directrice $\mathscr{C}$ $\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & = & a^2 \\ z^2+ax & = & a^2 \end{array}\right.$ et de sommet $A(a,0,0)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

3) Soit $\mathscr{P}$ la parabole $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 & = & 2y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$ et $A(0,0,1)$.

a) Donner une équation paramétrique du cône Σ_3 de sommet A et de directrice $\mathscr{P}$.

b) Montrer qu'il existe une droite $\mathscr{D}$ telle que $\Sigma_3 \cup \mathscr{D}$ soit un cône de révolution dont on précisera l'équation cartésienne, l'axe et le demi-angle au sommet.

4) Équation cartésienne du cône Σ_4 circonscrit à la surface $x^4+y^4+z^4 = 1$ et de sommet $A(0,2,0)$.

5) Équation cartésienne du cône Σ_5 circonscrit à la surface $x^2+y^2+z^2-2z = 0$ et de sommet $A(0,0,-1)$.

Exercice 7 (hyperboloïde à une nappe)

Soit a, b, c trois réels strictement positifs, et Σ la surface d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 1$$

1) (bonus) Donner un paramétrage de Σ. On pourra penser aux fonctions hyperboliques.

2) Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, on pose A_θ le point de coordonnées $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$. Montrer que ce point est dans Σ.

3) Soit $\theta \in [0,2\pi]$ fixé, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur.
Écrire les conditions sur les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ pour que la droite $A_\theta + \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u})$ soit incluse dans Σ.
En déduire qu'il existe exactement deux droites, $\mathscr{D}_\theta$ et $\mathscr{D}'_\theta$, passant par A_θ et contenues dans Σ.

4) Montrer que, pour tout $(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x^2+y^2 = u^2+v^2$, il existe $\theta \in [0,2\pi]$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & u\cos\theta - v\sin\theta \\ y & = & u\sin\theta + v\cos\theta \end{array}\right.$$

Indication : *Poser dans un premier temps $A = \cos\theta$ et $B = \sin\theta$ ou raisonner géométriquement.*

5) En déduire deux familles de droites engendrant Σ, en remarquant que l'équation de départ peut s'écrire.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1+\frac{z^2}{c^2}$$

On pourrait de plus prouver que
- deux droites prises dans deux familles différentes sont toujours coplanaires ;
- deux droites prises dans une même familles ne sont jamais coplanaires.

Ce qui explique sans doute la solidité des structures de béton armé en forme d'hyperboloïde à une nappe.

Exercice 8

Pour chacune des surfaces suivantes, vérifier qu'elles sont de révolution et déterminer leur axe. Dans chacun des cas, décrire les parallèles et une méridienne.

1) $x^2+y^2-8z = 0$ **2)** $4x^2+4y^2-2z^2 = 1$ **3)** $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & u\cos v \\ y & = & u\sin v \\ z & = & \operatorname{Arccos} u \end{array}\right.$ **4)** $(x^2+z^2)^3-y^2+2y-3 = 0$

Exercice 9

Déterminer une équation cartésienne de la surface Σ de révolution engendré par la rotation autour de l'axe $x = y = z$ de la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par $x = t$, $y = t^2$ et $z = -t^2$.

Exercice 10
Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que la surface d'équation $z = f(x^2 + y^2)$ est de révolution. On précisera l'axe et une méridienne.

Exercice 11 (tore $S^1 \times S^1$)
Soit a et R deux réels vérifiant $0 < R < a$. On note Σ la surface de révolution engendrée par la rotation du cercle de centre $A(a, 0, 0)$ et de rayon R contenu dans le plan (Oxz) autour de l'axe (Oz).

1) Déterminer une équation paramétrique [2] du tore Σ.

2) Déterminer une équation cartésienne du tore Σ.

Exercice 12 (conoïde)

1) Construction de la conoïde Σ.

- **a)** Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $A(0, 1, 1)$ et de rayon 1 contenu dans le plan $y = 1$. Donner une équation paramétrique de $\mathscr{C}$.
- **b)** Soit $\mathscr{D}_t$ la droite joignant un point de paramètre t de $\mathscr{C}$ à son projeté orthogonal sur (Oz). Donner une équation paramétrique de $\mathscr{D}_t$.

On note Σ la surface réglée engendrée par les droites $\mathscr{D}_t$.

2) La surface Σ est-elle développable ?

3) Déterminer une équation cartésienne de $\Sigma' = \Sigma \cup (Oz)$. (ne pas oublier $\boxed{\supset}$).

4) Préciser la nature de la courbe intersection de Σ avec un plan parallèle à Oxz.

5) Calculer le volume du solide intérieur à Σ compris entre les plans d'équation respective $y = 0$ et $y = 1$.

Exercice 13 (lignes de plus grande pente)
Soit Σ la surface d'équation $x^2 - y^2 = z$, et $\mathscr{C}$ un arc $\mathscr{C}^1$ de paramétrage $\left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (f(t), g(t), z(t)) \end{array} \right.$

1) Donner la condition sur $t \mapsto z(t)$ pour que la courbe $\mathscr{C}$ soit incluse dans Σ.

2) Quelle relation doivent vérifier f et g pour qu'en chaque point $\mathscr{C}$ soit perpendiculaire à la section horizontale de Σ passant par ce point ?

La courbe $\mathscr{C}$ est alors appelée une ligne de plus grande pente, et les sections horizontale des lignes de niveau.

Exercice 14 (Hélicoïde)
Soit Σ la surface paramétrée par $\left\{ \begin{array}{ccl} x & = & \cos t - \lambda \sin t \\ y & = & \sin t + \lambda \cos t \\ z & = & t + \lambda \end{array} \right.$ avec $(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que Σ est une surface réglée développable.

2) Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétré par $\left\{ \begin{array}{ccl} x & = & \cos t \\ y & = & \sin t \\ z & = & t \end{array} \right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

- **a)** Montrer que $\mathscr{C}$ est une hélice.
- **b)** Déterminer la surface engendré par les tangentes à $\mathscr{C}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 15 (supplémentaire)
Soit Σ la surface de représentation paramétrique : $x = u + v$; $y = 2uv$; $z = -u^3/3 + vu^2$. Montrer que Σ est réglée développable.

Exercice 16 (supplémentaire)
Lignes de plus grande pente pour les surfaces suivantes

$$\Sigma_1 : z(x^2 + y^2) - ax^2 = 0 \qquad \Sigma_2 : z = \frac{\ln y}{\ln x}$$

2. Ce qui permet, par exemple, de le faire tracer par Maple.