Exercice 1
Soit T un réel strictement positif et $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
Soit $E = \mathscr{C}^0_T(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions T-périodiques continues, muni du produit scalaire

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad (f|g) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus on considère les fonctions

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad e_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(n\omega x) \end{array} \qquad f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(n\omega x) \end{array}$$

Dans la suite, on notera $\mathscr{F} = \{e_0\} \cup \{(e_n, f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\}$, la famille des $(e_n, f_n)_n$ où l'on enlève f_0 qui est nul.

1) Montrer que $\mathscr{F}$ est une famille orthogonale.

2) E est-il de dimension finie ?

3) Calculer la norme des éléments de $\mathscr{F}$.

4) Soit $F_N = \mathrm{Vect}\,(e_0, e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_N, f_N)$. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ la projection orthogonale sur F_N.
Pour $f \in E$, exprimer $p(f)$ à l'aide des éléments de $\mathscr{F}$. (on pourra commencer par rappeler la formule dans le cas où $F = \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$, avec (ε_i) une famille orthogonale).

5) Montrer que $F_N = \{x \mapsto P(\cos(\omega x), \sin(\omega x)) \mid P = \displaystyle\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} a_{ij}X^iY^j \in \mathbb{R}_{(N)}[X,Y]\}$.

Exercice 2
Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = x^2.$$

1) Étudier la parité de f. Tracer f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

3) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad , \qquad \Sigma_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 3 (E3A PC 2007)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, et f, la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = \mathrm{ch}\,(\alpha x).$$

1) Développer la fonction f en série de Fourier.

2) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}, \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}.$$

Exercice 4
Soit f la fonction 2-périodique impaire définie par

$$\forall x \in [0, 1], \qquad f(x) = x(1-x).$$

1) Tracer f sur $[-1, 1]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

3) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \quad , \quad \Sigma_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \quad \text{et} \quad \Sigma_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$$

Exercice 5
Soit $\theta \in]0,\pi[$. Soit f la fonction 2π-périodique paire donnée par

$$\begin{cases} f(x) & = & 1 & \text{si } x \in [0,\theta] \\ f(x) & = & 0 & \text{si } x \in]\theta,\pi] \end{cases}$$

1) Tracer f sur $[-\pi,\pi]$.

2) Développer la fonction f en série de Fourier.

Solution. La fonction f étant paire, $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.
En utilisant la parité de f, $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}x = \dfrac{\theta}{\pi}$.
Pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\theta \cos(nx)\,\mathrm{d}x =$ etc...

3) Étudier la convergence de la série de Fourier.

Solution. La fonction f est $\mathscr{C}^1$ par morceau donc le théorème de Dirichlet prouve la convergence de la série de Fourier vers la régularisée : $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$.
Pour $x \neq \pm\theta \mod 2\pi$, f est continue en x donc $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2} = f(x)$.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ pour $\theta \in]0,\pi[$, puis pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

Solution. On évalue la série précédente en $x = 0$, vu que $\theta \in]0,\pi[$.
Pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$, on pose $\theta = \pi + \theta'$. En remarquant que $\sin(n\theta) = (-1)^n \sin(n\theta')$ et que $\theta' \in]0,\pi[$, on évalue la série de Fourier précédente en $x = \pi$, en notant l'angle θ'.

Exercice 6
Montrer qu'il n'existe pas de fonction 2π-périodique continue par morceaux telle que sa série de Fourier soit $\displaystyle\sum \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$.
Solution. Formule de Parseval : la série $\sum a_n^2$ devrait converger, or ce n'est pas le cas ici.

Exercice 7
Soit f la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in]-\pi,\pi], \qquad f(x) = e^{-x}.$$

1) Calculer les coefficients de Fourier complexes[1] et de la fonction f.

2) En déduire que

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1+e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}.$$

Solution. Formule de Parseval.

Exercice 8
Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n(f) = \dfrac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}\,\mathrm{d}x$ et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$

1) Déterminer les coefficients de Fourier de f en fonction de ceux de f'.

Solution. Faire une IPP : partir de $a_n(f')$, intégrer f et dériver $\cos(nx)$. Idem pour les $b_n(f')$. Si vous partez de $a_n(f)$, attention au cas $n = 0$.

2) On suppose que plus $a_0(f) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 \, \mathrm{d}x$.

Solution. Parseval pour f et pour f', puis utiliser 1).

Exercice 9

1) Décomposer en éléments simple la fraction rationnelle **Solution.** $R(X) = \dfrac{1}{5 + 2(X + \frac{1}{X})}$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{5 + 4\cos x}$. À l'aide d'une série entière, développer f en série de Fourier. Indication : *Écrire* $\cos x$ *avec des exponentielles, et utiliser 1).*

Solution. $f(x) = 2R(e^{ix})$. On utilise la série géométrique pour obtenir une égalité du type $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0} \alpha_n \cos(nx)$. Par unicité du développement en série de Fourier, le α_n trouvé est le coefficient $a_n(f)$.

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{5 + 4\cos x} \, \mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. D'après 2), $a_n(f) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{5 + 4\cos x} \, \mathrm{d}x = \dots.$

Exercice 10

Déterminer, pour $a > 0$, le développement en série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,(a) - \cos(x)}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(nx)}{\mathrm{ch}\,(a) - \cos x} \, \mathrm{d}x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. Même idée.