1 Oral II – ENSAM

Planche 1 (2013, ENSAM, incomplet — élève 1)
Déterminer les polynômes P tels que $P(x^2) = P(x)P(X+1)$. Indication : *Si* 0 *et* 1 *sont les seules racines, comment s'écrit le polynôme* P *?*

Planche 2 (2013, ENSAM — élève 2)
Soit $(E) : x^2y'' - 2xy' + 2y = 2(1+x)$.

1) Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$ de l'équation (E') homogène associée.

2) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Attention à l'intervalle.

3) Solutions de (E) sur les intervalles I déterminés à la question précédente. (écrire $\ln|x|$, en faisant simple et sans oublier les valeurs absolues).

4) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Planche 3 (2013, ENSAM — élève 3)
Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 7 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ (coeffs à revoir)

1) Trouver P inversible telle que $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

2) Étudier les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - 6v_n + 7w_n \\ v_{n+1} = -4u_n - v_n + 10w_n \\ w_{n+1} = 7u_n - 6v_n + 4w_n \end{cases}$

Planche 4 (2013, ENSAM — élève 4)
Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

1) Convergence.

2) Montrer que $I = J$.

3) Déduire I et J du calcul de $I + J$.

Planche 5 (2013, ENSAM — élève 5)
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(C) : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

1) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre (E) que l'on déterminera.

4) Résoudre (E), puis (C).

Planche 6 (2013, ENSAM — élève 6)
Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

1) Montrer que T est un endomorphisme de E.

2) Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

3) Montrer que si $T(f) = \lambda f$, alors f vérifie une équation différentielle d'ordre 2.

4) Valeurs propres et sous-espaces propres de T.

Planche 7 (2013, ENSAM — élève 7)

1) Montrer que pour $x > 0$, $\mathrm{Arctan}\,(x) + \mathrm{Arctan}\,(1/x) = \dfrac{\pi}{2}$. Et pour $x < 0$?

2) Soit $c > 0$, nature de la suite de terme général $u_n = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Arctan}\,(n^c)\right)$.

3) Équivalent de (u_n).

Planche 8 (2012, ENSAM — élève 0)

Soit $(E) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$, pour $x \in]0, +\infty[$

1) Résoudre $u'' - u = 0$.

2) Effectuer le changement de variable $y = \dfrac{z}{x^2}$.

3) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

4) En déduire toutes les solutions. Quelles sont les solutions ayant une limite à droite en 0 ?

Planche 9 (2012, ENSAM — élève 1)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f et g deux endomorphismes tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

1) Montrer que E est de dimension infinie.

2) Montrer que $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

3) On suppose g nilpotent. Montrer que $g = 0$.

4) Soit $E = \mathbb{R}[X]$, f la dérivation et g définie par $g(X^n) = X^{n+1}$. Montrer que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$. Que peut-on en déduire sur $\mathbb{R}[X]$?

Planche 10 (2012, ENSAM — élève 2)

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$.

1) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$

2) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Planche 11 (2012, ENSAM — élève 4)

Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x+\lambda & y+\lambda & \cdots & y+\lambda \\ z+\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y+\lambda \\ z+\lambda & \cdots & z+\lambda & x+\lambda \end{vmatrix}$$

Planche 12 (2012, ENSAM — élève 5)

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(1, 1, 0)$ et de direction $u(1, 1, 1)$.

1) Déterminer une équation de la surface de révolution S_1 engendrée par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe (Oz).

2) Soit S_2 la surface d'équation $x^2 + y^2 = (z + 1)^2 + 1$. Déterminer l'intersection de S_1 et de S_2.

(et d'autres questions désormais hors programme).

Planche 13 (2012, ENSAM — élève 7)

Soit $n \geqslant 1$, et $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$.

Résoudre le système d'équations différentielles $X'(t) = AX(t)$, où $X \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n})$.

Planche 14 (2012, ENSAM — élève 8)
Soit $a > 0$. À l'aide du polynôme $Q(X) = (1 - X)^n - a^n$, trouver une forme réduite de :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + a^2 - 2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

Planche 15 (2012, ENSAM — élève 9)
Soit $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - a$. Notons α, β, γ les racines de P.

1) Déterminer la valeur de a pour laquelle $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$ est minimale.

2) Donner alors l'expression de P pour la valeur de a trouvée. Ses racines sont-elles réelles ?

Planche 16 (2012, ENSAM — élève 10)
Pour P et Q dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

1) Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire.

2) Montrer que $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ est une base orthogonale, puis en déduire une base orthonormée $\mathscr{C}$.

3) On pose $f(P)(X) = P(1 - X)$ pour $P \in E$. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}. Que peut-on dire de f ?

4) L'application f est-elle une symétrie orthogonale ?

Planche 17 (2012, ENSAM — OT 259)
Calculer, suivant n, le déterminant Δ_n de la matrice de coefficients a_{ij} définis par $a_{ij} = 1$ sur $|i - j| \leqslant 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon (on cherchera une relation de récurrence).

Planche 18 (2012, ENSAM — OT 260)
Montrer que $f_n(x) = x^n - \cos x$ admet un unique zéro sur $[0, 1]$, noté α_n. Étudier la suite (α_n) et calculer sa limite si elle existe.

Planche 19 (2012, ENSAM — OT 261)

1) Montrer que 1 est valeur propre de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 1-a & 0 & a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$ et chercher un vecteur propre $U = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in]0, 1[^3$ vérifiant $x_0 + y_0 + z_0 = 1$.

2) Pour $a \in [0, 1[$, M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

3) Pour quelles valeurs de a la matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Planche 20 (2012, ENSAM — OT 262)
Soit φ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P)(X) = 2XP + P'$.

1) Montrer que φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\varphi(Q) = X^n$. Montrer que, pour tout $k \leqslant n$ impair, $Q^{(k)}(0) = 0$, en déduire que n est impair.

3) Montrer que, pour n impair, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(Q) = X^n$.

Planche 21 (2012, ENSAM — OT 263)
Montrer que $P = X^n \sin t + X \sin(nt) + \sin((n - 1)t)$ est divisible par $Q = X^2 - 2X\cos(t) + 1$ et exprimer le quotient en fonction de t et n.

Planche 22 (2012, ENSAM — OT 264)
Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^4 + y^4 = 1$.

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est bornée, étudier ses symétries.

2) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(x_0, y_0)$ et en déduire les tangentes à $\mathscr{C}$ en un point de l'axe des abscisses et en un point de l'axe des ordonnées.

3) Représenter $\mathscr{C}$ et le cercle unité dans un même repère.

4) Déterminer la distance minimale entre l'origine et la courbe $\mathscr{C}$.

Planche 23 (2012, ENSAM — OT 265)

On donne $I_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1-2\lambda\cos t+\lambda^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Pour quelles valeurs de λ l'intégrale I_n est-elle définie ?

2) Exprimer $I_n(1/\lambda)$ en fonction de $I_n(\lambda)$.

3) Calculer $I_0(\lambda)$ et en déduire $(1+\lambda)I_0(\lambda)+I_1(\lambda)$. Donner la valeur de $I_1(\lambda)$.

4) Calculer $I_{n+1}+I_{n-1}$ en fonction de I_n.

5) En déduire une expression de I_n en fonction de n.

2 Oral I – Cachan

Planche 24 (2014, Cachan — élève 1)

1)

Planche 25 (2013, Cachan — élève 1)

Soit $f : P \mapsto (X^2-1)P' - (2nX)P$ pour $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

1) Montrer que f est un endomorphisme.

2) Pour $n=1$, matrice de f dans la base canonique, valeurs propres.

3) Valeurs propres et vecteurs propres dans le cas général.

Planche 26 (2013, Cachan — élève 3)

1) Soit $a \in]0,1[$ et $I_a = \displaystyle\int_0^a \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Convergence de I_a.

b) Prouver que $I_a = \displaystyle\int_0^a -\ln(t) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n\ln t}{n+1}\,\mathrm{d}t$.

c) Calculer $I_{a,N} = \displaystyle\int_0^a -\ln(t) - \sum_{n=1}^{N}\frac{t^n\ln t}{n+1}\,\mathrm{d}t$.

d) Montrer que $t\ln t$ est bornée sur $]0,a[$.

e) En déduire que $I_{a,N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{N}\int_0^a \frac{t^n\ln t}{n+1}\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $N\to+\infty$.

f) Majorer $|I_a - I_{N,a}|$ puis en déduire I_a comme somme d'une série.

2) Question de cours : Rappeler la définition d'un espace vectoriel. Donner la formule de changement de base pour un vecteur.

Tous les élèves de l'après midi passés avec cette examinatrice ont eu le même exercice.

Planche 27 (2012, Cachan — élève 1)

1) Soit n un entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^(n+1)}$.

a) Montrer la convergence de I_n.

b) calculer I_0.

c) Donner une relation entre I_n et I_{n-1}, en déduire I_n en fonction de n.

d) La suite I_n tend elle vers une valeur finie ? Si oui laquelle et pourquoi ?

2) Cours : Théorème du rang. Calculer la somme de 0 à n de $\displaystyle\binom{n}{k}(-1)^k$. Deux matrices de même déterminant mais de trace différente sont-elles semblables ?

Planche 28 (2013, Cachan — Mimard)

1) **a)** Rappeler le théorème des accroissements finis.

b) Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(1) = f'(1) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall t \in [1-\eta;1], \quad |f'(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1-\eta} t^n f(t)dt$.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1} t^n f(t)dt$.

2) Questions de cours : Théorème du rang ; Vecteur normal à une surface en cartésien et en paramétrique.

Planche 29 (2013, Cachan — Mimard)

1) On considère l'application $u : P \mapsto (X^2+1)P' - 2XP$ définie sur $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que u est un endomorphisme.

b) Calculer $u(X^n)$ pour tout entier naturel n.

c) Déterminer un entier n tel que u induise un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note v cet endomorphisme induit.

d) Déterminer la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

e) Trouver le noyau et l'image de v.

f) Soit w défini par $w(aX^2+bX+c) = a+c$. Calculer $w \circ v$. Montrer que $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(w)$ puis montrer l'égalité.

2) Question de cours : Taylor reste intégral pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, Nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$.

Planche 30 (2013, Cachan — Mimard)

1) Soit
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

a) Donner une condition sur a_0 pour que C soit inversible.

b) Calculer le polynôme caractéristique de C.

c) Soit λ une valeur propre de ${}^tC$. Déterminer l'espace propre associé.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme appartenant à $\mathbb{R}[X]$ soit le polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

e) Montrer que les sous espace propre de C sont de dimension 1. En déduire une condition de diagonalisabilité de C portant sur les (a_i).

f) Montrer qu'un endomorphisme est cyclique si et seulement si il existe une base dans la quelle sa matrice est du type de C. (Les deux dernières questions perdues et remplacées ? ? ?)

g) Montrer que $\psi_C(C) = 0$. Généralisation ? (Question rajoutée)

2) Questions de cours : [HP] ; définition d'un espace propre.

Planche 31 (2013, Cachan — Lyon)

1) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Trouver une relation entre A, A^2 et I_n.

b) A est-elle inversible ?

c) A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres.

d) D'autres questions non traitées.

2) Questions de cours :

- Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
- Égalité des accroissements finis.
- Définition d'un isomorphisme.

Planche 32 (2013, Cachan — Lyon)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ la courbe paramétrée par :

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & 4a(1+2\sin^2(t))\cos(t) \\ y(t) & = & 3a\sin^3(t) \end{array}$$

1) Tracer Γ.

2) Calculer la longueur de Γ.

3) Une autre question non traitée.

Planche 33 (2013, Cachan — Lyon)

1) Soit f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{\cos^2 t}}\,\mathrm{d}t$$

a) Déterminer le domaine de définition de f et g.

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f et g.

c) Montrer que $f^2 + g$ est constante.

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2) Questions de cours :

- Définition d'une affinité orthogonale ;
- Formule de Taylor avec reste-intégral.

Planche 34 (2013, Cachan — Lyon)

1) **a)** Rappeler le théorème des accroissements finis.

b) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(1) = f'(1) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [1-\eta, 1],\ |f'(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1-\eta} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Questions de cours :

- Théorème du rang.
- Vecteur normal à une surface en cartésienne et en paramétrique.

Planche 35 (2013, Cachan — Lyon)

1) Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On note $C(u)$ le commutant de u, c'est-à-dire :

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ t.q. } u \circ v = v \circ u\}$$

a) Montrer que $C(u)$ est un espace vectoriel contenant les polynômes en u.

b) Soit F un sous-e.v. stable par u. Montrer que F est stable par tout élément v de $C(u)$.

  c) On suppose que u admet n valeurs propres distinctes, avec $n = \dim E$. Montrer que les éléments de $C(u)$ sont diagonalisables dans une même base.

2) Questions de cours :

- Matrices orthogonales.
- Sommes de Riemann.

Planche 36 (2013, Cachan — Lyon)

1) Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = -I_n$.

  a) Montrer que n est pair.

  b) Dans le cas où $n = 2$, montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  c) Dans le cas général, montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\operatorname{diag}(B, B, \dots, B)$.

2) Questions de cours :

- Formule de Taylor avec reste-intégral.
- Factorisation de $x^n - y^n$.

3 Petites Mines

Remarques générales :

- Avec préparation (voir notice).
- 2 exercices, vous les traitez tous les deux, dans l'ordre que vous voulez.
- L'examinatrice est directif sur l'usage du temps : demande de passer à l'exercice sur l'autre thème au bout d'un certain temps. Elle vous laisse présenter le travail sur la feuille sans intervenir.

Remarques du président du jury : Si le candidat fait une erreur, puis se reprend (et explique son erreur), c'est très bien. Sinon, l'examinatrice donne des indication. Points perdus en fonction de la quantité d'indications, jusqu'à 8/20 s'il y a blocage, puis aide directe de l'examinatrice jusqu'à 5/20.

Planche 37 (2013, Mines — élève 1)

1) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x = t$, $y = t^2$, $z = -t$. On fait tourner cette courbe autour de l'axe Δ d'équation $x = y = z$. Déterminer l'équation de la surface.

2) Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et $f(P)(X) = (X^2 - 1)P'(X) - 2nXP(X)$ où $P \in E$.

  a) Montrer que f est un endomorphisme.

  b) Valeurs propres et vecteurs propres de f.

Planche 38 (2013, Mines — élève 2)

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$.

2) Encadrer S_n.

3) Montrer que $\displaystyle\sum (-1)^{n+1} \frac{S_{n+1}}{2n+1}$ converge.

Planche 39 (2013, Mines — élève 3)

Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer J^2.

2) J est-elle inversible ?

3) J est-elle diagonalisable ?

4) Montrer que $M = aI_3 + bJ$ est diagonalisable. Indication : *Par une autre méthode que la méthode directe sur M ?*

5) Conditions pour que M soit inversible ? Indication : *Sans calculs ?*

Planche 40 (2013, Mines — élève 4)

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Ensemble de définition de F.

2) Montrer que F est continue sur son domaine de définition.

3) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

Planche 41 (2013, Mines — élève 5, partiel)

1) Question de cours [HP] ; définition d'une matrice orthogonale.

2) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 ; x+y \leqslant 2 ; x-y \leqslant 2\}$ et $f(x,y) = (2x+2y-1)^3 + 8(x-y)^2 - 48x$. Extrema, existence de minima et maxima locaux, globaux.

Planche 42 (2013, Mines — élève 6)

1) Question de cours : [HP] ;énoncer le critère de D'Alembert.

2) Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donner les éléments caractéristiques de A et la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

Et une autre question désormais HP.

Planche 43 (2013, Mines — élève 7)

1) Question de cours : [HP] ; critère de convergence des intégrales de Riemann en 0 et $+\infty$.

2) Donner les solutions développables en série entière sur un intervalle I à préciser de l'équation différentielle :

$$xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$$

3) Donner la matrice de la rotation d'axe $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\pi/2$ dans la base canonique.

Planche 44 (2013, Mines — élève 8)

1) Question de cours : Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $I =]-1,1[$. Énoncer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre.

2) Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $f(P) = (X+1)^2(P'(1) + P(1))$

- **a)** Montrer que c'est un endomorphisme. Noyau, image.
- **b)** On considère $\widetilde{f} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ? Quelle est son rang (sans calcul).

3) Soit Σ la surface $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 3 = 0$. Déterminer le plan tangent à Σ contenant D d'équation $z = 10$, $x = 2y$.

Planche 45 (2013, Mines — élève 9)

1) Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{4n}}{4n+1}$. Domaine de convergence de la série, expression à l'aide de fonctions usuelles.

2) Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général 1.

a) La matrice J est-elle diagonalisable ?

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} x^2+1 & x & \cdots & x \\ x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x^2+1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable, et donner son polynôme caractéristique (en évitant autant que possible les calculs).

Planche 46 (2012, Mines — élève 1)

1) On étudie la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

a) Déterminer le rayon de convergence.

b) Écrire $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{2n+1}$.

c) Écrire f à l'aide de fonctions usuelles.

2) Soit Σ la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 1$

Question HP.

a) Symétries et plans de symétrie de Σ.

b) Plan orthogonal à la surface.

Planche 47 (2012, Mines — élève 2)

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est diagonalisable et donner la matrice de passage P.

b) Soit M appartenant à l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels telle que $M^2 + M = A$.
Montrer que $P^{-1}MP$ est diagonale.

c) Donner les solutions de $M^2 + M = A$.

2) Soit $x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$ et $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$.

a) Tracer la courbe.

b) Calculer la longueur de la courbe.

c) Déterminer la courbure pour tout $t \in]0, 2\pi/3[$.

Planche 48 (2012, Mines — élève 3)

1) Cours : [HP] ; énoncer le critère d'Alembert pour les séries entières.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = AMA$.

a) Donner la matrice Φ de φ dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

b) Calculer $\varphi(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, puis pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Φ est-elle diagonalisable ?

d) Diagonaliser Φ.

3) **a)** Résoudre $X^2 + (-2+3i)X - 2(1+2i) = 0$.

b) Résoudre $y'' + (-2+3i)y' - 2(1+2i)y = 2\cos(x)e^{2x}$.

Planche 49 (2012, Mines — élève 4)

Deux questions de cours.

1) Soit $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et $\varphi(X, X') = xx' + 2yy' + 3zz' + tt' + xy' + x'y + xz' + zx' + yz' + zy'$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Question HP.

Planche 50 (2012, Mines — élève 5)

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\operatorname{Arctan}(xt)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie pour tout $x \geqslant 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution positive.

2e exercice HP.

Planche 51 (2012, Mines — élève 6)

1) **a)** Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ converge.

b) Calculer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ et calculer sa somme.

c) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

2) Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ si et seulement si $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$, et que dans ce cas $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Planche 52 (2012, Mines — élève 7)

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

a) Montrer qu'il existe une base de E telle que $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer les endomorphismes g de E tels que $fg = gf$.

2) **a)** Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ converge pour $\alpha \in]0, \pi[$.

b) En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{\cos t}$, calculer l'intégrale.

Planche 53 (2012, Mines — élève 8)

1) Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & b \\ c & -b & a+b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, calculer sa dimension. Est-ce une sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $\dfrac{\cos(2n\pi/3)x^n}{n}$.

Planche 54 (2012, Mines — élève 9)

1) Pour $n \geqslant 2$ entier on pose f_n la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

a) Montrer que $f_n(x) = 0$ a une unique solution, que l'on notera x_n.

b) Étudier les variations de (x_n) pour tout $n \geqslant 2$.

c) Montrer que (x_n) converge, calculer sa limite.

d) Trouver un équivalent de (x_n) pour $n \to +\infty$.

e) Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de (x_n).

2) Chercher les matrices carrées réelles d'ordre n vérifiant $A^t AA = I_n$.

Planche 55 (2012, Mines — élève 10)

1) Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Montrer que $p \leqslant n$.

2) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de limite ℓ lorsque $x \to +\infty$.
Soit y une solution de $y' + y = g$. Montrer que y tends vers ℓ quand $x \to +\infty$.

Planche 56 (2012, Mines — élève 11)

1) Cours : Nature de la conique $z = x^2 + 2y^2$. Énoncer le critère de D'Alembert.

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\text{sh } t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

3) Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$

a) La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

b) Réduire A_4.

c) Réduire A_n.