1 Oral II – ENSAM

Planche 1 (2013, ENSAM, incomplet — élève 1)
Déterminer les polynômes P tels que $P(x^2) = P(x)P(X+1)$. Indication : *Si* 0 *et* 1 *sont les seules racines, comment s'écrit le polynôme* P *?*

Planche 2 (2013, ENSAM — élève 2)

1) Soit $(E) : x^2y'' - 2xy' + 2y = 2(1+x)$.

- **a)** Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{N}$ de l'équation (E') homogène associée.
- **b)** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Attention à l'intervalle.
- **c)** Solutions de (E) sur les intervalles I déterminés à la question précédente. (écrire $\ln|x|$, en faisant simple et sans oublier les valeurs absolues).
- **d)** Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

2) Maple : Soit $K_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos nt}{5+4\cos t}\,\mathrm{d}t$, pour $n \in \mathbb{N}$

- **a)** Calculer K_n pour $0 \leqslant n \leqslant 5$.
- **b)** Montrer que $(K_n)_n$ vérifie $2K_{n-1} + 5K_n + 2K_{n-1} = 0$.
- **c)** En déduire K_n.
- **d)** Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{5+4\cos x}$. Montrer que $f(x) = \dfrac{K_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} K_n \cos(nx)$.
- **e)** Tracer f et plusieurs exemplaires de la série tronquée dans un même repère.

Planche 3 (2013, ENSAM — élève 3)

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 7 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ (coeffs à revoir)

- **a)** Trouver P inversible telle que $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- **b)** Étudier les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $\begin{cases} u_{n+1} &= 6u_n - 6v_n + 7w_n \\ v_{n+1} &= -4u_n - v_n + 10w_n \\ w_{n+1} &= 7u_n - 6v_n + 4w_n \end{cases}$

2) Maple : soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+t}{1+t^2}\right)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$, pour $x > 0$.

- **a)** Étudier la convergence de $I(x)$, déterminer $I(0)$.
- **b)** Montrer que I est $\mathscr{C}^1$.
- **c)** Déterminer $I'(x)$ pour $x > 0$, en déduire $I(x)$.
- **d)** ...

Planche 4 (2013, ENSAM — élève 4)

1) Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

- **a)** Convergence.
- **b)** Montrer que $I = J$.
- **c)** Déduire I et J du calcul de $I + J$.

2) Maple : Pour tout $P \in \mathbb{R}_4[X]$ on pose $f(P)(X) = \dfrac{1}{2}\left(P\Big(\dfrac{X}{2}\Big) - P\Big(\dfrac{X+1}{2}\Big)\right)$.

a) Montrer que f est un endomorphisme (sur papier a priori).

b) Déterminer la matrice de f dans la base canonique. Indication : *Utiliser* **coeff**.

c) f est-il diagonalisable ?

Planche 5 (2013, ENSAM — élève 5)

1) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $(C) : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

a) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre (E) que l'on déterminera.

d) Résoudre (E), puis (C).

2) Maple : Soit $\mathscr{C}_a$ la courbe d'équation $x = \dfrac{3-t^2}{t+a}$ et $y = \dfrac{1-3t^2}{t(t+a)}$.

a) Montrer que $\mathscr{C}_a$ admet un unique point d'inflexion. On note cD_a la tangente en ce point.

b) Déterminer et représenter l'enveloppe des droites $(\mathscr{D}_a)_{a\in\mathbb{R}}$.

Planche 6 (2013, ENSAM — élève 6)

1) Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on pose $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$ et $T(f)(0) = f(0)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Montrer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

c) Montrer que si $T(f) = \lambda f$, alors f vérifie une équation différentielle d'ordre 2.

d) Valeurs propres et sous-espaces propres de T.

2) Maple : $u_n = a\sqrt{n^2+n+1} + b\sqrt{2n^2+n+2} + c\sqrt{3n^2+n+3} + d\sqrt{4n^2+n+4}$. Conditions sur a, b, c et d pour que $\sum u_n$ converge.

Planche 7 (2013, ENSAM — élève 7)

1) **a)** Montrer que pour $x > 0$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \dfrac{\pi}{2}$. Et pour $x < 0$?

b) Soit $c > 0$, nature de la suite de terme général $u_n = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^c)\right)$.

c) Équivalent de (u_n).

2) Maple : On considère la courbe (E) : $\left\{\begin{array}{l} x = 2\cos(t) \\ y = \sin(t) \end{array}\right.$

a) Identifier et tracer (E).

b) Soit $\Omega(a, b)$ le centre d'un cercle tangent à (E). Trouver deux relations vérifiées par a et b.

c) Trouver le lieu des points Ω centre des cercles de rayon 1 et intérieur à (E). (tangents ? ?)

Planche 8 (2012, ENSAM — élève 0)

1) Soit $(E) : x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$, pour $x \in]0, +\infty[$

a) Résoudre $u'' - u = 0$.

b) Effectuer le changement de variable $y = \dfrac{z}{x^2}$.

c) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

d) En déduire toutes les solutions. Quelles sont les solutions ayant une limite à droite en 0 ?

2) Maple : On considère l'ellipse d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5\cos t \\ y & = & 4\sin t \end{array}\right.$

a) Tracer l'ellipse. Déterminer les foyers F_1 et F_2.

b) Donner une équation de la tangente D_t en $M(t)$.

c) Déterminer les coordonnées des projetés orthogonaux $M_1(t)$ et $M_2(t)$ de F_1 et F_2 sur $D(t)$.

d) Calculer $M_1F_1 \times M_2F_2$.

Planche 9 (2012, ENSAM — élève 0 (incomplet))

1) Maple : On considère la parabole d'équation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t^2 \end{array}\right.$

a) Donner l'équation de la normale à la parabole au point $M(t)$.

b) Soit $M'(t)$ le second point d'intersection de cette normale avec la parabole. Minimiser la longueur MM'.

Planche 10 (2012, ENSAM — élève 1)

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f et g deux endomorphismes tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

a) Montrer que E est de dimension infinie.

b) Montrer que $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

c) On suppose g nilpotent. Montrer que $g = 0$.

d) Soit $E = \mathbb{R}[X]$, f la dérivation et g définie par $g(X^n) = X^{n+1}$. Montrer que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$. Que peut-on en déduire sur $\mathbb{R}[X]$?

2) Maple : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - \tanh^a(x)\,\mathrm{d}x$

a) Discuter de l'existence de $I(a)$ en fonction des valeurs de a.

b) Calculer $I(a)$ pour $a \in \{1, \ldots, 10\}$.

Planche 11 (2012, ENSAM — élève 2)

1) soit E un espace vectoriel de dimension 3, soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$.

a) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Maple : Soit f définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ par $f(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2)$.

a) Étudier les maxima locaux.

b) Tracer la surface $z = f(x, y)$.

Planche 12 (2012, ENSAM — élève 3)

1) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On pose $f(P)(X) = XP''(X) + (1 - X)P'(X)$ pour $P \in E$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire et que f symétrique par rapport à φ.

b) Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable de E.

c) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f.

2) Maple : $f_a(x) = \mathrm{ch}\,(x)/(\exp(ax) + 1)$

a) Ensemble de définition de f_a.

b) Limite aux bornes de l'ensemble de définition.

c) Tracer le graphe de f pour quelques valeurs de a.

Planche 13 (2012, ENSAM — élève 4)

1) Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x+\lambda & y+\lambda & \cdots & y+\lambda \\ z+\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y+\lambda \\ z+\lambda & \cdots & z+\lambda & x+\lambda \end{vmatrix}$$

2) Maple : Soit $f(x) = (1+x^2)^{a/2}\cos(a\operatorname{Arctan}(x))$, où $a \notin \mathbb{N}$.

a) A l'aide d'un DL, déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre dont f est solution, telle que les coefficients soient des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

b) En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Planche 14 (2012, ENSAM — élève 5)

1) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(1,1,0)$ et de direction $u(1,1,1)$.

a) Déterminer une équation de la surface de révolution S_1 engendrée par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe (Oz).

b) Soit S_2 la surface d'équation $x^2+y^2 = (z+1)^2+1$. Décrire cette quadrique.

c) Déterminer l'intersection de S_1 et de S_2.

d) Déterminer le volume de la portion d'espace vérifiant $x^2+y^2 \leqslant (1+z)^2+1$ et $x^2+y^2 \geqslant 2(1+z)^2$.

2) Maple : Donner des condition sur a et b pour l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+1}}\right) - x^2\tan\left(\frac{b}{\sqrt{x^2+25}}\right)\,\mathrm{d}x$$

Planche 15 (2012, ENSAM — élève 6)

Maple : Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big)$.

1) Montrer que $|f(t)-t| \leqslant \dfrac{1}{2}t^2$ sur $]0,+\infty[$.

2) Prouver que U_n converge. Indication : *Comparer* U_n *à* $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$.

Planche 16 (2012, ENSAM — élève 7)

1) Soit $n \geqslant 1$, et $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$.

Résoudre le système d'équations différentielles $X'(t) = AX(t)$, où $X \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^{2n})$.

2) Maple : Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon $R_1 = 1$, et $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre $(0,4)$ et de rayon $R_2 = 2$.

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = kx^2$, où $k \in \mathbb{R}$ fixé.

a) Trouver k pour qu'il y ait 3 points d'intersection entre la parabole et les deux cercles. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A, B et C (A point d'intersection entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}_1$, B et C points d'intersection entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}_2$).

Planche 17 (2012, ENSAM — élève 8)

1) Soit $a > 0$. À l'aide du polynôme $Q(X) = (1-X)^n - a^n$, trouver une forme réduite de :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + a^2 - 2a\cos\Big(\frac{2k\pi}{n}\Big)\right)$$

2) Maple : Soit $f(x) = (1+x^2)^{a/2}\cos(a\operatorname{Arctan}(x))$, où $a \notin \mathbb{N}$.

a) A l'aide d'un DL, déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre dont f est solution, telle que les coefficients soient des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

b) En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Planche 18 (2012, ENSAM — élève 9)

1) Soit $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - a$. Notons α, β, γ les racines de P.

a) Déterminer la valeur de a pour laquelle $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$ est minimale.

b) Donner alors l'expression de P pour la valeur de a trouvée. Ses racines sont-elles réelles ?

2) Maple : Soit $\varphi(x) = \dfrac{a\cos x + b\sin x + c\tan x}{d + e\cos x + f\sin x + g\tan x}$.

a) Trouver a, b, c, d, e, f, g tels que $\varphi(x) = x + o(x^6)$.

b) Étudier le signe de $\varphi(x) - x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Planche 19 (2012, ENSAM — élève 10)

1) Pour P et Q dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

a) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ est une base orthogonale, puis en déduire une base orthonormée $\mathscr{C}$.

c) On pose $f(P)(X) = P(1 - X)$ pour $P \in E$. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}. Que peut-on dire de f ?

d) L'application f est-elle une symétrie orthogonale ?

Planche 20 (2012, ENSAM — OT 259)

1) Calculer, suivant n, le déterminant Δ_n de la matrice de coefficients a_{ij} définis par $a_{ij} = 1$ sur $|i-j| \leqslant 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon (on cherchera une relation de récurrence).

2) Maple : Soient $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ et f impaire, 2π périodique et définie par

$$\forall x \in]0, \alpha[\cup]\beta, \pi - \beta[\cup]\pi - \alpha, \pi[, \quad f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]\alpha, \beta[\cup]\pi - \beta, \pi - \alpha[, \quad f(x) = -1$$

a) Sans calculs, que peut-on dire des coefficients de Fourier de f ?

b) Pour tout $n \neq 0$, calculer $b_n(f)$ et expliciter b_i, pour $1 \leqslant i \leqslant 5$.

c) Pour quelles valeurs approchées de α et β a-t-on $b_3 = b_5 = 0$?

d) Pour ces valeurs de α et β, représenter f et calculer la somme de sa série de Fourier.

Planche 21 (2012, ENSAM — OT 260)

1) Montrer que $f_n(x) = x^n - \cos x$ admet un unique zéro sur $[0, 1]$, noté α_n. Étudier la suite (α_n) et calculer sa limite si elle existe.

2) Maple : Montrer que $(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} P(k/8)Q(k/8)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_8[X]$.

Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_5[X]$ pour ce produit scalaire.

Donner le projeté orthogonal d'un polynôme quelconque de degré 8 sur $\mathbb{R}_5[X]$. Tracer les courbes de ce polynôme et de son projeté.

Planche 22 (2012, ENSAM — OT 261)

1) **a)** Montrer que 1 est valeur propre de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 1-a & 0 & a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$ et chercher un vecteur propre

$U = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in]0, 1[^3$ vérifiant $x_0 + y_0 + z_0 = 1$.

b) Pour $a \in [0,1[$, M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

c) Pour quelles valeurs de a la matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2) Maple : Soit $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, où g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Calculer Δf et trouver les solutions de $\Delta f + f = 0$.

b) Lesquelles sont prolongeables par continuité en $(0,0,0)$? Trouver celle qui vérifie $f(0,\pi/2,0) = 1$.

Planche 23 (2012, ENSAM — OT 262)

1) Soit φ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P)(X) = 2XP + P'$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\varphi(Q) = X^n$. Montrer que, pour tout $k \leqslant n$ impair, $Q^{(k)}(0) = 0$, en déduire que n est impair.

c) Montrer que, pour n impair, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(Q) = X^n$.

2) Maple : Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ Trouver une condition sur a pour que toutes les valeurs propres soient strictement positives.

Planche 24 (2012, ENSAM — OT 263)

Montrer que $P = X^n \sin t + X \sin(nt) + \sin((n-1)t)$ est divisible par $Q = X^2 - 2X\cos(t) + 1$ et exprimer le quotient en fonction de t et n.

Planche 25 (2012, ENSAM — OT 264)

1) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^4 + y^4 = 1$.

a) Montrer que $\mathscr{C}$ est bornée, étudier ses symétries.

b) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(x_0, y_0)$ et en déduire les tangentes à $\mathscr{C}$ en un point de l'axe des abscisses et en un point de l'axe des ordonnées.

c) Représenter $\mathscr{C}$ et le cercle unité dans un même repère.

d) Déterminer la distance minimale entre l'origine et la courbe $\mathscr{C}$.

2) Maple : Soit $x_i = \dfrac{i}{10}$ et $y_i = \sin(2\pi x_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant 10$. On définit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

- Pour tout $i \in [\![1,10]\!]$ et tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $f(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$.
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$
- Pour tout $i \in [\![1,10]\!]$, $f(x_i) = y_i$. $f'(1^-) = 1$ et $f'(0^+) = 0$.

Déterminer a_i, b_i, c_i, d_i pour tout i.

Planche 26 (2012, ENSAM — OT 265)

1) On donne $I_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{1 - 2\lambda\cos t + \lambda^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Pour quelles valeurs de λ l'intégrale I_n est-elle définie ?

b) Exprimer $I_n(1/\lambda)$ en fonction de $I_n(\lambda)$.

c) Calculer $I_0(\lambda)$ et en déduire $(1+\lambda)I_0(\lambda) + I_1(\lambda)$. Donner la valeur de $I_1(\lambda)$.

d) Calculer $I_{n+1} + I_{n-1}$ en fonction de I_n.

e) En déduire une expression de I_n en fonction de n.

2) Maple : Soit Γ la courbe définie par $\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ z = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$

a) Déterminer une équation cartésienne d'une quadrique contenant Γ.

b) Réduire l'équation de cette quadrique.

c) Tracer la courbe et la quadrique sur un même dessin.

2 Oral I – Cachan

Planche 27 (2013, Cachan — élève 1)
Soit $f : P \mapsto (X^2-1)P' - (2nX)P$ pour $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.

1) Montrer que f est un endomorphisme.

2) Pour $n=1$, matrice de f dans la base canonique, valeurs propres.

3) Valeurs propres et vecteurs propres dans le cas général.

Planche 28 (2013, Cachan — élève 2)
Étudier $\rho(\theta) = \dfrac{1}{\sin(2\theta)}$.

Planche 29 (2013, Cachan — élève 3)

1) Soit $a \in]0,1[$ et $I_a = \displaystyle\int_0^a \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Convergence de I_a.

b) Prouver que $I_a = \displaystyle\int_0^a -\ln(t) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n \ln t}{n+1}\,\mathrm{d}t$.

c) Calculer $I_{a,N} = \displaystyle\int_0^a -\ln(t) - \sum_{n=1}^{N} \frac{t^n \ln t}{n+1}\,\mathrm{d}t$.

d) Montrer que $t \ln t$ est bornée sur $]0,a[$.

e) En déduire que $I_{a,N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \int_0^a \frac{t^n \ln t}{n+1}\,\mathrm{d}t$ converge lorsque $N \to +\infty$.

f) Majorer $|I_a - I_{N,a}|$ puis en déduire I_a comme somme d'une série.

2) Question de cours : Rappeler la définition d'un espace vectoriel. Donner la formule de changement de base pour un vecteur.

Tous les élèves de l'après midi passés avec cette examinatrice ont eu le même exercice.

Planche 30 (2012, Cachan — élève 1)

1) Soit n un entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^(n+1)}$.

a) Montrer la convergence de I_n.

b) calculer I_0.

c) Donner une relation entre I_n et I_{n-1}, en déduire I_n en fonction de n.

d) La suite I_n tend elle vers une valeur finie ? Si oui laquelle et pourquoi ?

2) Cours : Théorème du rang. Calculer la somme de 0 à n de $\displaystyle\binom{n}{k}(-1)^k$. Deux matrices de même déterminant mais de trace différente sont-elles semblables ?

Planche 31 (2013, Cachan — Mimard)

1) **a)** Rappeler le théorème des accroissements finis.

b) Soit f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(1) = f'(1) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\eta >$ tel que : $\forall t \in [1-\eta;1]$, $\quad |f'(t)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1-\eta} t^n f(t)dt$.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1} t^n f(t)dt$.

2) Questions de cours : Théorème du rang ; Vecteur normal à une surface en cartésien et en paramétrique.

Planche 32 (2013, Cachan — Mimard)

1) On considère l'application $u : P \mapsto (X^2+1)P' - 2XP$ définie sur $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que u est un endomorphisme.

b) Calculer $u(X^n)$ pour tout entier naturel n.

c) Déterminer un entier n tel que u induise un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. On note v cet endomorphisme induit.

d) Déterminer la matrice de v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

e) Trouver le noyau et l'image de v.

f) Soit w défini par $w(aX^2 + bX + c) = a + c$. Calculer $w \circ v$. Montrer que $\text{Im}(v) \subset \text{Ker}(w)$ puis montrer l'égalité.

2) Question de cours : Taylor reste intégral pour une fonction de classe C^{n+1}, définition d'une fonction de classeC^{n+1}, Nature de $\int_0^1 \ln(t)dt$.

Planche 33 (2013, Cachan — Mimard)

1) Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

a) Donner une condition sur a_0 pour que C soit inversible.

b) Calculer le polynôme caractéristique de C.

c) Soit λ une valeur propre de ${}^tC$. Déterminer l'espace propre associé.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme appartenant à $\mathbb{R}[X]$ soit le polynôme caractéristique d'une matrice carrée.

e) Montrer que les sous espace propre de C sont de dimension 1. En déduire une condition de diagonalisabilité de C portant sur les (a_i).

f) Montrer qu'un endomorphisme est cyclique si et seulement si il existe une base dans la quelle sa matrice est du type de C. (Les deux dernières questions perdues et remplacées ? ? ?)

g) Montrer que $\psi_C(C) = 0$. Généralisation ? (Question rajoutée)

2) Questions de cours : Énoncer le critère spécial des séries alternées. Définition d'un espace propre.

Planche 34 (2013, Cachan — Lyon)

1) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 0 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une relation entre A, A^2 et I_n.

b) A est-elle inversible ?

c) A est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres.

d) D'autres questions non traitées.

2) Questions de cours :

- Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$
- Égalité des accroissements finis.
- Définition d'un isomorphisme.

Planche 35 (2013, Cachan — Lyon)

1) Soit $a \geqslant 0$ et f la fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{ax}$$

a) f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

b) Pour $a > 0$, f est-elle paire ou impaire ?

c) Pour $a = 0$, donner sans calcul la série de Fourier de f.

d) Pour $a > 0$, calculer les coefficients de Fourier de f et en déduire :

$$S(f)(x) = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi} \times \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}(a\cos(nx) - n\sin(x))$$

e) Énoncer et appliquer la formule de Parseval.

f) Deux autres questions non traitées.

2) Questions de cours :
- CNS de diagonalisation.
- Reconnaître la surface d'équation $X^2 + 4Y^2 = Z + 1$.

Planche 36 (2013, Cachan — Lyon)
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et Γ la courbe paramétrée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= 4a(1 + 2\sin^2(t))\cos(t) \\ y(t) &= 3a\sin^3(t) \end{aligned}$$

1) Tracer Γ.

2) Calculer la longueur de Γ.

3) Une autre question non traitée.

Planche 37 (2013, Cachan — Lyon)

1) Soit f et g définies par :

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \text{ et } g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos^2 t}}\,dt$$

a) Déterminer le domaine de définition de f et g.

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f et g.

c) Montrer que $f^2 + g$ est constante.

d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

2) Questions de cours :
- Définition d'une affinité orthogonale ;
- Formule de Taylor avec reste-intégral.

Planche 38 (2013, Cachan — Lyon)

1) **a)** Rappeler le théorème des accroissements finis.

b) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telle que $f(1) = f'(1) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [1 - \eta, 1],\ |f'(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

c) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{1-\eta} t^n f(t)\,dt$.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

2) Questions de cours :
- Théorème du rang.
- Vecteur normal à une surface en cartésienne et en paramétrique.

Planche 39 (2013, Cachan — Lyon)

1) Soit E un espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On note $C(u)$ le commutant de u, c'est-à-dire :

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \text{ t.q. } u \circ v = v \circ u\}$$

a) Montrer que $C(u)$ est un espace vectoriel contenant les polynômes en u.

b) Soit F un sous-e.v. stable par u. Montrer que F est stable par tout élément v de $C(u)$.

c) On suppose que u admet n valeurs propres distinctes, avec $n = \dim E$. Montrer que les éléments de $C(u)$ sont diagonalisables dans une même base.

2) Questions de cours :
- Théorème de Dirichlet.
- Matrices orthogonales.
- Sommes de Riemann.

Planche 40 (2013, Cachan — Lyon)

1) Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^2 = -I_n$.

a) Montrer que n est pair.

b) Dans le cas où $n = 2$, montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Dans le cas général, montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\mathrm{diag}(B, B, \ldots, B)$.

2) Questions de cours :
- Formule de Taylor avec reste-intégral.
- Factorisation de $x^n - y^n$.
- Théorème de Dirichlet.

3 Petites Mines

Remarques générales :
- Avec préparation (voir notice).
- 2 exercices, vous les traitez tous les deux, dans l'ordre que vous voulez.
- L'examinatrice est directif sur l'usage du temps : demande de passer à l'exercice sur l'autre thème au bout d'un certain temps. Elle vous laisse présenter le travail sur la feuille sans intervenir.

Remarques du président du jury : Si le candidat fait une erreur, puis se reprend (et explique son erreur), c'est très bien. Sinon, l'examinatrice donne des indication. Points perdus en fonction de la quantité d'indications, jusqu'à 8/20 S'il y a blocage, puis aide directe de l'examinatrice jusqu'à 5/20.

Planche 41 (2013, Mines — élève 1)

1) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x = t$, $y = t^2$, $z = -t$. On fait tourner cette courbe autour de l'axe Δ d'équation $x = y = z$. Déterminer l'équation de la surface.

2) Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ et $f(P)(X) = (X^2 - 1)P'(X) - 2nXP(X)$ où $P \in E$.

a) Montrer que f est un endomorphisme.

b) Valeurs propres et vecteurs propres de f.

Planche 42 (2013, Mines — élève 2)

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

1) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n$.

2) Encadrer S_n.

3) Montrer que $\displaystyle\sum (-1)^{n+1} \frac{S_{n+1}}{2n+1}$ converge.

Planche 43 (2013, Mines — élève 3)

Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer J^2.

2) J est-elle inversible ?

3) J est-elle diagonalisable ?

4) Montrer que $M = aI_3 + bJ$ est diagonalisable. Indication : *Par une autre méthode que la méthode directe sur M ?*

5) Conditions pour que M soit inversible ? Indication : *Sans calculs ?*

Planche 44 (2013, Mines — élève 4)

Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Ensemble de définition de F.

2) Montrer que F est continue sur son domaine de définition.

3) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

Planche 45 (2013, Mines — élève 5, partiel)

1) Question de cours : $y^2 = 2x$, étudier la quadrique. Définition d'une matrice orthogonale.

2) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0; x+y \leqslant 2; x-y \leqslant 2\}$ et $f(x,y) = (2x+2y-1)^3 + 8(x-y)^2 - 48x$. Extrema, existence de minima et maxima locaux, globaux.

Planche 46 (2013, Mines — élève 6)

1) Question de cours : $x^2 + 2y^2 = 1$, décrire la quadrique. Énoncer le critère de D'Alembert.

2) $I = \displaystyle\iint_D x - 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x; x^2+y^2 \leqslant 1\}$

3) Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Donner les éléments caractéristiques de A et la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé.

Planche 47 (2013, Mines — élève 7)

1) Question de cours : Nature de la quadrique $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$. Critère de convergence des intégrales de Riemann en 0 et $+\infty$.

2) Donner les solutions développables en série entière sur un intervalle I à préciser de l'équation différentielle :

$$xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$$

3) Donner la matrice de la rotation d'axe $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'angle $\pi/2$ dans la base canonique.

Planche 48 (2013, Mines — élève 8)

1) Question de cours : Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $I =]-1,1[$. Énoncer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre.

2) Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, définie par $f(P) = (X+1)^2(P'(1) + P(1))$

- **a)** Montrer que c'est un endomorphisme. Noyau, image.
- **b)** On considère $\widetilde{f} : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice dans la base canonique. Est-elle diagonalisable ? Quelle est son rang (sans calcul).

3) Soit Σ la surface $x^2+2y^2-3z^2+3=0$. Déterminer le plan tangent à Σ contenant D d'équation $z=10$, $x=2y$.

Planche 49 (2013, Mines — élève 9)

1) Soit $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{4n}}{4n+1}$. Domaine de convergence de la série, expression à l'aide de fonctions usuelles.

2) Soit $J\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général 1.

a) La matrice J est-elle diagonalisable ?

b) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $A=\begin{pmatrix} x^2+1 & x & \cdots & x \\ x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x^2+1\end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable, et donner son polynôme caractéristique (en évitant autant que possible les calculs).

Planche 50 (2012, Mines — élève 1)

1) On étudie la série entière $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

a) Déterminer le rayon de convergence.

b) Écrire $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ sous la forme $\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{2n+1}$.

c) Écrire f à l'aide de fonctions usuelles.

2) Soit Σ la surface $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz-2xz=1$

a) Nature de la surface.

b) Symétries et plans de symétrie de Σ.

c) Plan orthogonal à la surface.

Planche 51 (2012, Mines — élève 2)

1) Soit $A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est diagonalisable et donner la matrice de passage P.

b) Soit M appartenant à l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels telle que $M^2+M=A$.
Montrer que $P^{-1}MP$ est diagonale.

c) Donner les solutions de $M^2+M=A$.

2) Soit $x(t)=2\cos(t)+\cos(2t)$ et $y(t)=2\sin(t)-\sin(2t)$.

a) Tracer la courbe.

b) Calculer la longueur de la courbe.

c) Déterminer la courbure pour tout $t\in]0,2\pi/3[$.

Planche 52 (2012, Mines — élève 3)

1) Cours : Donner la nature de la quadrique $x^2-2y^2+3z^2=1$. Énoncer le critère d'Alembert pour les séries entières.

2) Soit $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et $\varphi:\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\to\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M)=AMA$.

a) Donner la matrice Φ de φ dans la base $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$.

b) Calculer $\varphi(M)$ pour $M=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, puis pour $M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

c) Φ est-elle diagonalisable ?

d) Diagonaliser Φ.

3) **a)** Résoudre $X^2 + (-2+3i)X - 2(1+2i) = 0$.

b) Résoudre $y'' + (-2+3i)y' - 2(1+2i)y = 2\cos(x)e^{2x}$.

Planche 53 (2012, Mines — élève 4)

1) Cours : Donner la définition des coefficients de Fourier. Nature de la quadrique $z = x^2 - 3y^2$.

2) Soit $X = (x,y,z,t)$ et $X' = (x',y',z',t')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et $\varphi(X,X') = xx' + 2yy' + 3zz' + tt' + xy' + x'y + xz' + zx' + yz' + zy'$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire.

b) Donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

3) Soit $f(x,y) = x^2y^2$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |x|+|y| \geqslant 1\}$.
Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Planche 54 (2012, Mines — élève 5)

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\operatorname{Arctan}(xt)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie pour tout $x \geqslant 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution positive.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A.

b) Quelle est la nature de la surface $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4 = 0$? Quand a-t-on une surface de révolution ?

Planche 55 (2012, Mines — élève 6)

1) **a)** Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ converge.

b) Calculer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ et calculer sa somme.

c) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

2) Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ si et seulement si $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$, et que dans ce cas $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Planche 56 (2012, Mines — élève 7)

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

a) Montrer qu'il existe une base de E telle que $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer les endomorphismes g de E tels que $fg = gf$.

2) **a)** Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ converge pour $\alpha \in]0,\pi[$.

b) En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{\cos t}$, calculer l'intégrale.

Planche 57 (2012, Mines — élève 8)

1) Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & b \\ c & -b & a+b \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, calculer sa dimension. Est-ce une sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $\dfrac{\cos(2n\pi/3)x^n}{n}$.

Planche 58 (2012, Mines — élève 9)

1) Pour $n \geqslant 2$ entier on pose f_n la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

a) Montrer que $f_n(x) = 0$ a une unique solution, que l'on notera x_n.

b) Étudier les variations de (x_n) pour tout $n \geqslant 2$.

c) Montrer que (x_n) converge, calculer sa limite.

d) Trouver un équivalent de (x_n) pour $n \to +\infty$.

e) Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de (x_n).

2) Chercher les matrices carrées réelles d'ordre n vérifiant $A^tAA = I_n$.

Planche 59 (2012, Mines — élève 10)

1) Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Montrer que $p \leqslant n$.

2) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de limite ℓ lorsque $x \to +\infty$.

Soit y une solution de $y' + y = g$. Montrer que y tends vers ℓ quand $x \to +\infty$.

Planche 60 (2012, Mines — élève 11)

1) Cours : Nature de la conique $z = x^2 + 2y^2$. Énoncer le critère de D'Alembert.

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

3) Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$

a) La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

b) Réduire A_4.

c) Réduire A_n.