1 Oral II – ENSAM

Planche 1 (2012, ENSAM — élève 0)

1) Soit $(E) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$, pour $x \in]0, +\infty[$

a) Résoudre $u'' - u = 0$.

b) Effectuer le changement de variable $y = \dfrac{z}{x^2}$.

c) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.

d) En déduire toutes les solutions. Quelles sont les solutions ayant une limite à droite en 0 ?

2) Maple : On considère l'ellipse d'équation paramétrique $\begin{cases} x & = & 5\cos t \\ y & = & 4\sin t \end{cases}$

a) Tracer l'ellipse. Déterminer les foyers F_1 et F_2.

b) Donner une équation de la tangente D_t en $M(t)$.

c) Déterminer les coordonnées des projetés orthogonaux $M_1(t)$ et $M_2(t)$ de F_1 et F_2 sur $D(t)$.

d) Calculer $M_1F_1 \times M_2F_2$.

Planche 2 (2012, ENSAM — élève 0 (incomplet))

1) Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et $p, q \in]-1, 1[$, différents de 0, tels que $p + q = 1$.
On pose $u(f)(x) = f(px + q)$.

a) Montrer que u est un automorphisme de E.

b) Quelles sont ses valeurs propres ? Indication : *Regarder* $u^n(f)$.

2) Maple : On considère la parabole d'équation paramétrique $\begin{cases} x & = & t \\ y & = & t^2 \end{cases}$

a) Donner l'équation de la normale à la parabole au point $M(t)$.

b) Soit $M'(t)$ le second point d'intersection de cette normale avec la parabole. Minimiser la longueur MM'.

Planche 3 (2012, ENSAM — élève 1)

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f et g deux endomorphismes tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

a) Montrer que E est de dimension infinie.

b) Montrer que $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$.

c) On suppose g nilpotent. Montrer que $g = 0$.

d) Soit $E = \mathbb{R}[X]$, f la dérivation et g définie par $g(X^n) = X^{n+1}$. Montrer que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.
Que peut-on en déduire sur $\mathbb{R}[X]$?

2) Maple : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 1 - \tanh^a(x)\,\mathrm{d}x$

a) Discuter de l'existence de $I(a)$ en fonction des valeurs de a.

b) Calculer $I(a)$ pour $a \in \{1, \ldots, 10\}$.

Planche 4 (2012, ENSAM — élève 2)

1) soit E un espace vectoriel de dimension 3, soit f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$.

a) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Maple : Soit f définie sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ par $f(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2)$.

a) Étudier les maxima locaux.

b) Tracer la surface $z = f(x, y)$.

Planche 5 (2012, ENSAM — élève 3)

1) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On pose $f(P)(X) = XP''(X) + (1 - X)P'(X)$ pour $P \in E$.

a) Montrer que φ est un produit scalaire et que f symétrique par rapport à φ.

b) Montrer que f est un endomorphisme diagonalisable de E.

c) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de f.

2) Maple : $f_a(x) = \mathrm{ch}\,(x)/(\exp(ax) + 1)$

a) Ensemble de définition de f_a.

b) Limite aux bornes de l'ensemble de définition.

c) Tracer le graphe de f pour quelques valeurs de a.

Planche 6 (2012, ENSAM — élève 4)

1) Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} x+\lambda & y+\lambda & \cdots & y+\lambda \\ z+\lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y+\lambda \\ z+\lambda & \cdots & z+\lambda & x+\lambda \end{vmatrix}$$

2) Maple : Soit $f(x) = (1 + x^2)^{a/2} \cos(a \,\mathrm{Arctan}\,(x))$, où $a \notin \mathbb{N}$.

a) A l'aide d'un DL, déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre dont f est solution, telle que les coefficients soient des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

b) En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Planche 7 (2012, ENSAM — élève 5)

1) Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(1, 1, 0)$ et de direction $u(1, 1, 1)$.

a) Déterminer une équation de la surface de révolution S_1 engendrée par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe (Oz).

b) Soit S_2 la surface d'équation $x^2 + y^2 = (z + 1)^2 + 1$. Décrire cette quadrique.

c) Déterminer l'intersection de S_1 et de S_2.

d) Déterminer le volume de la portion d'espace vérifiant $x^2 + y^2 \leqslant (1 + z)^2 + 1$ et $x^2 + y^2 \geqslant 2(1 + z)^2$.

2) Maple : Donner des condition sur a et b pour l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{a}{\sqrt{x^2+1}}\right) - x^2 \tan\left(\frac{b}{\sqrt{x^2+25}}\right) \mathrm{d}x$$

Planche 8 (2012, ENSAM — élève 6)

Maple : Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1) Montrer que $|f(t) - t| \leqslant \dfrac{1}{2}t^2$ sur $]0, +\infty[$.

2) Prouver que U_n converge. Indication : *Comparer* U_n *à* $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$.

Planche 9 (2012, ENSAM — élève 7)

1) Soit $n \geqslant 1$, et $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$.

Résoudre le système d'équations différentielles $X'(t) = AX(t)$, où $X \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n})$.

2) Maple : Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon $R_1 = 1$, et $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre $(0,4)$ et de rayon $R_2 = 2$.
Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = kx^2$, où $k \in \mathbb{R}$ fixé.

a) Trouver k pour qu'il y ait 3 points d'intersection entre la parabole et les deux cercles. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A, B et C (A point d'intersection entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}_1$, B et C points d'intersection entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}_2$).

Planche 10 (2012, ENSAM — élève 8)

1) Soit $a > 0$. À l'aide du polynôme $Q(X) = (1-X)^n - a^n$, trouver une forme réduite de :

$$P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + a^2 - 2a\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

2) Maple : Soit $f(x) = (1+x^2)^{a/2}\cos(a \operatorname{Arctan}(x))$, où $a \notin \mathbb{N}$.

a) A l'aide d'un DL, déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre dont f est solution, telle que les coefficients soient des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

b) En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

Planche 11 (2012, ENSAM — élève 9)

1) Soit $P(x) = x^3 - ax^2 + ax - a$. Notons α, β, γ les racines de P.

a) Déterminer la valeur de a pour laquelle $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$ est minimale.

b) Donner alors l'expression de P pour la valeur de a trouvée. Ses racines sont-elles réelles ?

2) Maple : Soit $\varphi(x) = \dfrac{a\cos x + b\sin x + c\tan x}{d + e\cos x + f\sin x + g\tan x}$.

a) Trouver a, b, c, d, e, f, g tels que $\varphi(x) = x + o(x^6)$.

b) Étudier le signe de $\varphi(x) - x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Planche 12 (2012, ENSAM — élève 10)

1) Pour P et Q dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose $< P, Q >= P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

a) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire.

b) Montrer que $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ est une base orthogonale, puis en déduire une base orthonormée $\mathscr{C}$.

c) On pose $f(P)(X) = P(1-X)$ pour $P \in E$. Montrer que f est un automorphisme de E et déterminer f^{-1}. Que peut-on dire de f ?

d) L'application f est-elle une symétrie orthogonale ?

Planche 13 (2012, ENSAM — OT 259)

1) Calculer, suivant n, le déterminant Δ_n de la matrice de coefficients a_{ij} définis par $a_{ij} = 1$ sur $|i-j| \leqslant 1$ et $a_{ij} = 0$ sinon (on cherchera une relation de récurrence).

2) Maple : Soient $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ et f impaire, 2π périodique et définie par

$$\forall x \in]0, \alpha[\cup]\beta, \pi - \beta[\cup]\pi - \alpha, \pi[, \quad f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in]\alpha, \beta[\cup]\pi - \beta, \pi - \alpha[, \quad f(x) = -1$$

a) Sans calculs, que peut-on dire des coefficients de Fourier de f ?

b) Pour tout $n \neq 0$, calculer $b_n(f)$ et expliciter b_i, pour $1 \leqslant i \leqslant 5$.

c) Pour quelles valeurs approchées de α et β a-t-on $b_3 = b_5 = 0$?

d) Pour ces valeurs de α et β, représenter f et calculer la somme de sa série de Fourier.

Planche 14 (2012, ENSAM — OT 260)

1) Montrer que $f_n(x) = x^n - \cos x$ admet un unique zéro sur $[0,1]$, noté α_n. Étudier la suite (α_n) et calculer sa limite si elle existe.

2) Maple : Montrer que $(P,Q) = \sum_{k=0}^{8} P(k/8)Q(k/8)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_8[X]$.
Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_5[X]$ pour ce produit scalaire.
Donner le projeté orthogonal d'un polynôme quelconque de degré 8 sur $\mathbb{R}_5[X]$. Tracer les courbes de ce polynôme et de son projeté.

Planche 15 (2012, ENSAM — OT 261)

1) **a)** Montrer que 1 est valeur propre de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 1-a \\ 1-a & 0 & a \\ a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$ et chercher un vecteur propre $U = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in]0,1[^3$ vérifiant $x_0 + y_0 + z_0 = 1$.

b) Pour $a \in [0,1[$, M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

c) Pour quelles valeurs de a la matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2) Maple : Soit $f(x,y,z) = g(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, où g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Calculer Δf et trouver les solutions de $\Delta f + f = 0$.

b) Lesquelles sont prolongeables par continuité en $(0,0,0)$? Trouver celle qui vérifie $f(0,\pi/2,0) = 1$.

Planche 16 (2012, ENSAM — OT 262)

1) Soit φ défini sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P)(X) = 2XP + P'$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\varphi(Q) = X^n$. Montrer que, pour tout $k \leqslant n$ impair, $Q^{(k)}(0) = 0$, en déduire que n est impair.

c) Montrer que, pour n impair, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(Q) = X^n$.

2) Maple : Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ Trouver une condition sur a pour que toutes les valeurs propres soient strictement positives.

Planche 17 (2012, ENSAM — OT 263)

Montrer que $P = X^n \sin t + X \sin(nt) + \sin((n-1)t)$ est divisible par $Q = X^2 - 2X\cos(t) + 1$ et exprimer le quotient en fonction de t et n.

Planche 18 (2012, ENSAM — OT 264)

1) Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^4 + y^4 = 1$.

a) Montrer que $\mathscr{C}$ est bornée, étudier ses symétries.

b) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(x_0, y_0)$ et en déduire les tangentes à $\mathscr{C}$ en un point de l'axe des abscisses et en un point de l'axe des ordonnées.

c) Représenter $\mathscr{C}$ et le cercle unité dans un même repère.

d) Déterminer la distance minimale entre l'origine et la courbe $\mathscr{C}$.

2) Maple : Soit $x_i = \dfrac{i}{10}$ et $y_i = \sin(2\pi x_i)$, pour $1 \leqslant i \leqslant 10$. On définit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

- Pour tout $i \in [\![1,10]\!]$ et tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $f(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$.
- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$
- Pour tout $i \in [\![1,10]\!]$, $f(x_i) = y_i$. $f'(1^-) = 1$ et $f'(0^+) = 0$.

Déterminer a_i, b_i, c_i, d_i pour tout i.

Planche 19 (2012, ENSAM — OT 265)

1) On donne $I_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1 - 2\lambda\cos t + \lambda^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Pour quelles valeurs de λ l'intégrale I_n est-elle définie ?

b) Exprimer $I_n(1/\lambda)$ en fonction de $I_n(\lambda)$.

c) Calculer $I_0(\lambda)$ et en déduire $(1+\lambda)I_0(\lambda)+I_1(\lambda)$. Donner la valeur de $I_1(\lambda)$.

d) Calculer $I_{n+1}+I_{n-1}$ en fonction de I_n.

e) En déduire une expression de I_n en fonction de n.

2) Maple : Soit Γ la courbe définie par $\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ z = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$

a) Déterminer une équation cartésienne d'une quadrique contenant Γ.

b) Réduire l'équation de cette quadrique.

c) Tracer la courbe et la quadrique sur un même dessin.

Planche 20 (2011, ENSAM — élève 1, corrigé)

1) Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

- On considère le cercle de centre O, de rayon 1 et A le point de coordonnées $(1,0)$.
- Soit M un point courant du cercle, et $\theta = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})$.
- H est l'orthocentre du triangle OAM.

a) Déterminer les coordonnées de H.

b) Déterminer une équation polaire de la courbe décrite par l'ensemble des points H.

c) Étudier et tracer cette courbe.

2) Maple : Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$.

a) Déterminer $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-f(t)+f(-t)/3+2f(2t)/3}{t^2}$.

b) Déterminer les réels a, b, c, d tels que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{af(t)+bf(-t)+cf(2t)+df(-2t)}{t^3} = f^{(3)}(0)$.

c) Trouver une limite (du type que la précédente) pour $f^{(4)}(0)$.

d) Trouver une relation de récurrence pour $f^{(2n)}(0)$.

Planche 21 (2011, ENSAM — élève 3)

1) $f(x,y) = (x^2-1)^2+(y^2-1)^2$.

a) En remarquant que $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2-2x^2y^2+1$, trouver les lignes de niveau $f(x,y)-1=0$.

b) Nature et tracé des lignes de niveau.

c) Sur quels domaines $f(x,y)>1$ et $f(x,y)<1$?

d) Extrema éventuels de f.

2) Maple : Soit $\mathscr{C}$ la courbe $x=t$ et $y=t^2$.

a) Équation de la normale à la courbe en $M(t)$.

b) Condition sur u, v et w pour que les normales à la courbe issures de $M(u)$, $M(v)$ et $M(w)$ soient concourantes.

c) Centre de gravité du triangle $M(u)M(v)M(w)$.

Planche 22 (2011, ENSAM — élève 4, corrigé)

1) Soit le polynôme X^3-X+1 et a, b, c ses 3 racines.

a) Montrer que a, b et c sont distinctes.

b) Soit $S_n = a^n+b^n+c^n$ Calculer S_n pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.

2) Maple : Soit g_1 une fonction 2π périodique sur $\mathbb{R}$ définie par $g_1(x) = \pi - x$ sur $]0,2\pi[$ et $g_1(0)=0$. Pour tout n, g_{n+1} est la primitive nulle en 0 de g_n.

a) Montrer que g_1 est impaire. Calculer le développement en série de Fourier de g_1 a un ordre convenable et comparer graphiquement à g_1.

b) Montrer que g_2 est paire. Tracer le développement en série de Fourier de g_2 a un ordre convenable et comparer à g_2.

c) Montrer que g_n a la parité de n. Tracer le développement en série de Fourier de g_n a un ordre convenable et comparer à g_n.

Planche 23 (2011, ENSAM — élève 5)

1) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et $(Z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $Z_{n+1} = (a + ib)X_n + (b + ia)Y_n$, où $Z_n = X_n + iY_n$.

a) Calculer X_{n+1} et Y_{n+1} en fonction de X_n et Y_n.

b) Calculer X_n et Y_n en fonction de X_0, Y_0, a et b.

2) Maple : Soit (E) l'équation différentielle $y' + y + \dfrac{1}{x} = 0$

a) Soit $y(1) = \alpha$. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $y(x) = 0$ possède au moins une solution sur $]0, +\infty[$.

Planche 24 (2011, ENSAM — élève 6)

1) Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \dfrac{-n+1}{n+1}a_n + \dfrac{2n}{n+1}b_n \\ b_{n+1} & = & -\dfrac{n}{n+1}a_n + \dfrac{2n+1}{n+1}b_n \end{array}\right.$ et $a_0 = 1$, $b_0 = 0$

a) Calculer $a_n - 2b_n$ et $a_n - b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, avec R_1 et R_2 leurs rayons de convergence respectifs. Calculer $f(x) - 2g(x)$ et $f(x) - g(x)$ pour $|x| < \inf(R_1, R_2)$.

c) Déterminer R_1 et R_2.

2) Maple : Équation réduite d'une ellipse : $(X/\alpha)^2 + (Y/\beta)^2 = 1$ et $S = \pi * \alpha * \beta$.
Soit $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $a(x - d)^2 + b(x - d)(y - e) + c(y - e)^2 = 1$. On veut que cette ellipse passe par les 3 points du triangle $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ et $C(1; 1)$

a) Déterminer a, b, c en fonction de d et e.

b) Déterminer d et e pour l'aire soit minimale. Pourquoi l'aire ne dépend pas de d et e ?

Planche 25 (2011, ENSAM — élève 7)

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, \forall x \in \mathbb{R}\; P(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t\}$

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrer que si $P \in E$ alors $P' \in E$.

3) Monter que $P \in E$ ne peut pas être de degré 2.

4) Déterminer E.

Planche 26 (2011, ENSAM — élève 8/OT 242)

1) Maple : Montrer que $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ est prolongeable par continuité en 0. Tracer la surface et déterminer les extrema. Indication : *On coupera par des plan bien choisis, par exemple* $y = 2x$.

2) Etudier la courbe d'équations paramétriques $x = 3t^2$ et $y = 2t^3$. Déterminer les droites à la fois tangentes et normales à la courbe.

Planche 27 (2011, ENSAM — élève 9)

1) Soit E un espace préhilbertien et $\mathscr{B}$ une base de E telle que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, avec

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >^2 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \|e_i\| = 1$$

- **a)** Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille orthonormée de E
- **b)** En étudiant la projection de E sur F engendrée par $\mathscr{B}$, montrer que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de E.

2) Maple : Résoudre sur des intervalles convenables l'équation différentielle $(x+1)y' = (x-1)y + x$.

- **a)** Tracer quelques courbes intégrales.
- **b)** Y a-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, la ou les tracer.
- **c)** Que dire des tangentes en $x = 1$?

Planche 28 (2011, ENSAM — élève 10)

1) On donne $I_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1 - 2\lambda\cos t + \lambda^2}\,\mathrm{d}t$.

- **a)** Pour quelles valeurs de λ I_n est-elle définie ?
- **b)** Exprimer $I_n(1/\lambda)$ en fonction de $I_n(\lambda)$.
- **c)** Calculer I_0 et I_1.
- **d)** Calculer $I_{n+1} + I_{n-1}$ en fonction de I_n.
- **e)** En déduire une expression de I_n en fonction de n.

2) Maple : Soit $P(X) = 2X^5 - 3X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + 4$.

- **a)** Déterminer a, b, c tels que P admette une racine triple et deux autres racines simples opposées.
- **b)** En déduire toutes les racines de P.
- **c)** Sans calculs, quelles prévisions aurait-on pu faire concernant la racine triple ? Indication : *Utiliser* ***coeff***.

Planche 29 (2011, ENSAM — élève 11, corrigé)

1) Soit p et q deux projecteurs tels que $p \circ q = 0$, et $r = p + q - q \circ p$.

- **a)** Montrer que r est un projecteur.
- **b)** Montrer que $\operatorname{Ker} r = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
- **c)** Montrer que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

2) Maple : Résoudre l'équation différentielle $xy' + (3+x)y = x^2\cos x$.

- **a)** Tracer les courbes intégrales.
- **b)** Existe-t-il une solution prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$?

Planche 30 (2011, ENSAM — élève 12)

1) Soit $P = X^3 + aX^2 + aX + a)$, avec $a > 0$. On note α, β, γ les racines de P dans $\mathbb{C}$.

- **a)** Déterminer a tel que $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$ soit minimal (on montrera que cette quantité est réelle).
- **b)** Exprimer P, et déterminer son nombre de racines réelles, puis son nombre de racines complexes.
- **c)** Déterminer les racines de P.

2) Maple : Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3} a_k e^{-k|x|}$, où $a_k \in \mathbb{R}$.

- **a)** Déterminer les a_k tels que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, $\mathscr{C}_f$ soit tangente aux droites $y = x - 1$ et $y = -x - 1$ respectivement en $x = 1$ et $x = -1$, et que $f(0) = 0$.
- **b)** Tracer la ou les courbes obtenues. (Indication : *Copié-coller des formules interdit !*)

Planche 31 (2011, ENSAM — élève 13)

1) Soit l'équation polaire $\rho = 1 + \tan(\theta/2)$. Etudier cette courbe, préciser les branches infinis et les points doubles puis la tracer.

2) Maple : Trouver les fonctions φ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que, si on pose $f(x,y) = \varphi(y/x)$, on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{x}$.

Planche 32 (2011, ENSAM — élève 14)

1) Soit $E = R^3$, $u \in R^3$, $u = (a, b, c)$ avec u non nul. Soit $f(x) = x + u \wedge x$.

a) Montrer que f est un endomorphisme et écrire sa matrice dans la base canonique.

b) Montrer que 1 est la seule valeur propre réelle et déterminer le sous espace propre associé.

c) **i)** La matrice associée à f est elle diagonalisable ?

ii) L'application f est elle bijective ? Déterminer le rang de f.

2) Maple : $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

a) Montrer que f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) Soit g la réciproque de f, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Calculer le développement limité de g à l'ordre 11 au voisinage de 0.

Planche 33 (2011, ENSAM — OT 238)

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \dfrac{1}{2}$ admet une unique racine positive x_n. Étudier la monotonie de (x_n) et conclure quant à sa convergence.

2) Maple : Déterminer a et b réels tels que $(1+i)$ soit racine de $P(X) = X^4 + X^3 + aX^2 + \sqrt{2}X + b$. Déterminer les autres racines de P, puis l'écrire comme un produit de facteurs irréductibles.

Planche 34 (2011, ENSAM — OT 239)

1) Soit f 2π-périodique, définie sur $]0, 2\pi[$ par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ et $f(0) = 0$.

a) Tracer le graphe de f. Calculer ses coefficients de Fourier. Énoncer le théorème de Dirichlet.

b) Soit, pour $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} (a_p(f)\cos(px) + b_p(f)\sin(px))$. Montrer que $R_n(x) = \displaystyle\int_x^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}$.

2) Maple : Trouver le polynôme P de plus bas degré tel que $P(X+1) + P(X) = X^{10}$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^{10}$.

Planche 35 (2011, ENSAM — OT 240, corrigé)

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ $y'' + 9y = 2\cos x \cos(3x)$.

2) Maple : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

a) A est-elle inversible ?

b) Montrer que $F = \{B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid AB = 0\}$ est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.

c) Mêmes questions pour $G = \{C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid CA = 0\}$. F et G sont-ils égaux ? Sinon, donner $F \cap G$.

Planche 36 (2011, ENSAM — OT 244)

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

3) Maple : On note f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{6} \alpha_k t^k$ sur $[0, 2\pi[$, où $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Soit $a_n(f)$ et $b_n(f)$ ses coefficients de Fourier.

a) Calculer les α_k (puis f sur $[0,2\pi[$) pour que $a_0(f)=0$, $a_n(f)=\dfrac{1}{n^6}$ et $b_n(f)=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

b) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{12}}$. Tracer f sur $[0,2\pi[$.

Planche 37 (2011, ENSAM — OT 245)

1) Dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$, on donne la nappe paramétrée N : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& u^2+uv+v^2\\ y &=& u+v\\ z &=& u^3+v^3\end{array}\right.$

a) Déterminer les points singuliers et le plan tangent à N en un point régulier.

b) Montrer que N est contenu dans la surface d'équation $z=3xy-2y^3$ et retrouver le plan tangent à N par une autre méthode.

2) Maple :

a) Résoudre sur des intervalles convenables l'équation différentielle $(x+1)y'=(x-1)y+x$.

b) Tracer quelques courbes intégrales. Y a-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$? Si oui, la ou les tracer.

c) Que dire des tangentes en $x=1$.

Planche 38 (2010, ENSAM — OT 1, corrigé)

1) Maple : étudier et tracer la courbe $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t^4-4t\\ y &=& t^2-t\end{array}\right.$

Montrer qu'elle présente un point double et calculer l'angle des tangentes en ce point.

2) On pose $f(x)=\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ si $x>0$ et $f(x)=\dfrac{\operatorname{sh}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}}$ si $x<0$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, on notera aussi f ce prolongement.

Montrer que f admet un développement en série entière en au voisinage de 0. Trouver $f'(0)$ et $f''(0)$. Tracer et étudier f.

Planche 39 (2010, ENSAM — OT 2)

1) Maple : trouver a, b, c, d, e, f pour que $A=\begin{pmatrix} a&1&b\\ 1&c&d\\ e&f&1\end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ pour vecteurs propres.

2) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2, et $f\in\mathscr{L}(E)$.

a) Montrer que, si f est de trace nulle, alors f^2 est une homothétie.

b) On suppose désormais que f est de trace nulle et inversible. Montrer que $f=as$ où $a\in\mathbb{C}$ et s est une symétrie par rapport à un sous espace dont on précisera la dimension.

c) En déduire l'existence d'une base dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix}0&\alpha\\ \alpha&0\end{pmatrix}$.

Planche 40 (2010, ENSAM — OT 3)

1) Résoudre, à l'aide de séries entières, l'équation différentielle $xy''+(x-2)y'-2y=x+2$.

2) Maple : Montrer que $(P,Q)\mapsto\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_5[X]$ pour ce produit scalaire. Donner le projeté orthogonal d'un polynôme quelconque de degré 8 sur $\mathbb{R}_5[X]$.

Tracer les courbes de ce polynôme et de son projeté.

Planche 41 (2010, ENSAM — OT 4, corrigé)

1) Maple : Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, donner l'équation de la droite symétrique de $\mathscr{D}_1$: $\left\{\begin{array}{rcl} x+\sqrt{3}y+z &=& 1\\ y+\sqrt{3}z &=& -1\end{array}\right.$

par rapport à $\mathscr{D}_2$: $\left\{\begin{array}{rcl} x-\sqrt{3}y+z &=& 1\\ \sqrt{3}x+z &=& -1\end{array}\right.$.

2) Soit $I(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{t^2-1}{(t^2+1)\sqrt{t^4+1}}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $I(-y,-x) = I(x,y)$ et que pour tout $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, $I(x,y) = \displaystyle\int_{x+1/x}^{y+1/y} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-2}}$ (on pourra faire le changement de variable $u = t + \dfrac{1}{t}$).
Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{b^2-2}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{a^2-2}{2}}$ (on pourra poser $v = \sqrt{u^2-2}$).
Calculer $I(x,y)$.

Planche 42 (2010, ENSAM — OT 5)

1) a) Montrer que, pour tout $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi = 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2(2\varphi)$.

b) Montrer que, pour $a > 0$ et $b > 0$, pour tout $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) = \frac{(a^2-b^2)^2}{4}\sin^2(2\varphi) + a^2b^2$$

c) Montrer que l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a pour longueur

$$L = 4\int_0^{\pi/4} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} + \sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

d) À l'aide des questions précédentes, montrer que $\pi(a+b) \leqslant L \leqslant \pi\sqrt{2a^2+2b^2}$.

2) Cours : CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Planche 43 (2010, ENSAM — OT 6)

1) Soit f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$.
Déterminer la nature des séries de terme général $f(n)$ et $(-1)^n f(n)$.
Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$.

2) Maple : trouver l'ensemble des complexes z tels que les points d'affixes z, $j = e^{2i\pi/3}$ et $1 + jz$ soient alignés. Les représenter dans le plan complexe.

Planche 44 (2010, ENSAM — OT 7, corrigé)

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $f(x) = x^2e^{2x}$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{2x}$. Déterminer P_n à l'aide du calcul de A^n.

2) Maple : Soit P de degré 6, de coefficients α_k et f la fonction 2π-périodique valant P sur $[0, 2\pi[$.
Déterminer P tel que $a_0(f) = 0$, $a_n(f) = \dfrac{1}{n^6}$ et $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; où $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont les coefficients de Fourier de f.
Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{12}}$.

Planche 45 (2007, ENSAM — OT 187, corrigé)

1) Soit $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Que peut-on en déduire ?

2) Maple : déterminer les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & a & b \\ -c & -b & a \end{pmatrix}$ réelles telles que $M^2 = I_3$. Interprétation géométrique.

Planche 46 (2010, ENSAM — OT 8)

1) Déterminer, en fonction du paramètre $a > 0$, le nombre de solutions de l'équation $\left(\dfrac{a+x}{2}\right)^{(a+x)/2} = a^x$ (on pourra étudier une fonction bien choisie).

2) Maple : soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $f(X) = X^t A - A^t X$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Est-il diagonalisable ? Si oui, dans quelle base ?

Planche 47 (2010, ENSAM — OT 9)

1) Quelle est la plus grande aire possible d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon 1 ?

2) Maple : déterminer, nommer et représenter la surface telle que, pour tout point M, la distance de M à $\mathscr{D} : \begin{cases} 4x + y - 2z &= 0 \\ 3x + y + 2 &= 0 \end{cases}$ soit la moitié de la distance de M au plan $\mathscr{P} : x - y - z = 0$.

Planche 48 (2010, ENSAM — OT 10)

1) Étudier et tracer $\rho(\theta) = \sqrt{|\cos(2\theta)|}$. Calculer l'aire d'une boucle et donner le repère de Frénet en un point de paramètre θ.

2) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Dans $\mathbb{C}$?

Planche 49 (2010, ENSAM — OT 11, corrigé)

1) **a)** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $I_k =]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$. Montrer qu'il existe un unique $x_k \in I_k$ tel que $\tan x_k = x_k$.

c) Montrer que $x_k = k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x_k}$.

d) Trouver a, b et c tels que $x_k = ak + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k^2} + d + o(1/k^2)$

2) Cours : formule de Taylor-Young, théorème de Dirichlet, fonctions $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

Planche 50 (2010, ENSAM — OT 12)

1) Montrer que $\varphi(x) = x + \dfrac{x^3}{3}$ définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et calculer $(\varphi^{-1})'$.

Soit f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$; on suppose que $\forall x \geqslant 0$, $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t^2}}{1 + f^2(t)}\,\mathrm{d}t$; montrer que f est dérivable.

Montrer que f vérifie $\varphi(f(x)) = \dfrac{4}{3} + \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2) Tracer la courbe $\begin{cases} x(t) &= t^2 + t \\ y(t) &= t + \dfrac{1}{t} \end{cases}$. Montrer que l'application qui à t associe $M(t)$ est injective.
Y a-t-il des points stationnaires ? Montrer que la courbe admet trois points d'inflexion. Sont-ils alignés ?

Planche 51 (2010, ENSAM — OT 13, corrigé)

1) Maple : déterminer le reste de la division euclidienne de $x^n + 2x^m + 1$ par $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Vérifier le résultat pour $n = 100$ et $m = 43$.

2) Montrer que $f(x) = e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1. Développer f en série entière.

Planche 52 (D'après ENSAM — L 1, corrigé)

1) Maple : trouver les matrices orthogonalement semblables à $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ à coefficients diagonaux nuls.

2) Pour tout entier n on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que (u_n) est décroissante.

b) Calculer $u_{n+2} + u_n$

c) Déterminer un équivalent de u_n.

Planche 53 (2007, ENSAM — OT 182)

1) Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \dfrac{1}{4}(I_3 + J)$. Calculer J^n et A^n.

Déterminer (x_n), (y_n) et (z_n) définies par : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

2) Maple : Déterminer A et B tels que la série de terme général $u_n = \cos(\pi(n^3 + An^2 + Bn)^{1/3})$ soit absolument convergente.

Planche 54 (2007, ENSAM — OT 183)

1) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln t} \, \mathrm{d}t$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$. Donner les variations de f.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln t} - \frac{1}{t} \mathrm{d}t = 0$. En déduire que f a une limite finie en $+\infty$ que l'on précisera.

3) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et dérivable à droite en 0. Donner l'allure du graphe représentatif de la fonction f.

Planche 55 (2007, ENSAM — OT 184)

1) Maple : trouver une CNS pour que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable, avec a et b réels. Soit P la matrice de passage. Vérifier que $P^{-1}AP$ est bien diagonale.

2) Soit $u_n = \left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n} - \dfrac{1}{e}\right]^{\alpha}$. Étudier la convergence des séries de terme général u_n et $(-1)^n u_n$.

Planche 56 (2007, ENSAM — OT 186)

1) Soit E un espace vectoriel, x_0 un vecteur non nul de E et U une forme linéaire. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = U(x)x_0$.
Montrer que f est un endomorphisme et calculer son rang. Calculer f^k pour $k \geqslant 1$. Donner une CNS pour que $f \circ f = f$.

2) Maple : Soit $f(x) = \dfrac{(x^3 + ax + 1)e^{1/x}}{x + 1}$. Tracer quelques exemples de courbes et étudier les branches infinies.

Planche 57 (2007, ENSAM — OT 188)

1) Soit la fonction $f : x \mapsto x \operatorname{Arctan}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

a) Montrer que, au voisinage de 0, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}|x| - x^2 + o(x^2)$.

b) Montrer que, quand $x \to \pm\infty$, $f(x) = \dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4x} + o(\dfrac{1}{x})$.

c) Étude de la fonction, allure de la courbe.

2) Maple : Soit $P(x) = 2x^4 - \dfrac{35}{3}x^3 + \dfrac{51}{2}x^2 + \alpha x + 9$. Trouver α tel que P ait une racine triple et donner ses racines.

Planche 58 (2007, ENSAM — OT 189)

1) Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que g, définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{xy} f(t)\mathrm{d}t$, est prolongeable par continuité. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1$? de classe $\mathscr{C}^2$?

2) Maple : valeurs et vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} a+b+5 & -2b+2 & -4b+4 \\ -2b+2 & a-2b+8 & 2b-2 \\ -4b+4 & 2b-2 & a+b+5 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable ? Donner la matrice de passage et la matrice diagonale.

Planche 59 (2007, ENSAM — OT 191)

1) Maple : Déterminer, étudier et tracer la conique passant par les 5 points du plan $(2,0)$; $(0,1)$; $(-1,2)$; $(0,-1)$; $(1,1)$.

2) Étudier la série de Fourier de f 2π-périodique définie par $f(x) = x^3 + ax$ sur $]-\pi,\pi[$, et $f(\pi) = f(-\pi) = 0$. Dans quels cas f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$.

Planche 60 (2007, ENSAM — OT 192)

1) Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que g est $\mathscr{C}^2$ et calculer g''.

3) Montrer que $g(x) = \operatorname{Arctan} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x)$.

Planche 61 (2007, ENSAM — OT 193)

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 e^{-(x^2+y^2)}$ et soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $z = f(x,y)$. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ au point de coordonnées $(1,1,e^{-2})$.

2) Donner la structure de l'ensemble $\mathcal{M}\dashv\}_n$ des matrices magiques M de taille $n \times n$ (même somme pour les lignes, colonnes, diagonale et anti-diagonale, que l'on notera $S(M)$). Propriétés de l'application S. Préciser la structure du sous-ensemble des matrices de $\mathcal{M}\dashv|_n$ antisymétriques, lien avec S.

Planche 62 (2007, ENSAM — OT 196)

Soit E l'ensemble des fonctions 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on note $a_n(f)$ et $b_n(f)$ ses coefficients de Fourier.

1) Montrer que, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $|\alpha\beta| \leqslant \dfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$.

2) Montrer que, pour tout $(f,g) \in E^2$, les séries $\sum a_n(f)a_n(g)$ et $\sum b_n(f)b_n(g)$ convergent absolument. À l'aide de la formule de Parseval, montrer que

$$a_0(f)a_0(g) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n(f)a_n(g) + b_n(f)b_n(g)\right) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

3) Montrer que $\sum \dfrac{a_n(f)}{n}$ et $\sum \dfrac{b_n(f)}{n}$ convergent pour tout $f \in E$. Calculer $\sum \dfrac{b_n(f)}{n}$ à l'aide de $B = \displaystyle\int_0^{2\pi} (\pi - t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

4) On suppose f continue. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = B + a_0(f)x + \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\left(a_n(f)\sin(nx) - b_n(f)\cos(nx)\right)$$

On pourra remarquer qu'il est question de convolution, cf les exercices d'intégration. $c_n(f \star g) = c_n(f)c_n(g)$

2 Oral I – Cachan

Planche 63 (2012, Cachan — élève 1)

1) Soit n un entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^(n+1)}$.

- **a)** Montrer la convergence de I_n.
- **b)** calculer I_0.
- **c)** Donner une relation entre I_n et I_{n-1}, en déduire I_n en fonction de n.
- **d)** La suite I_n tend elle vers une valeur finie ? Si oui laquelle et pourquoi ?

2) Cours : Théorème du rang. Calculer la somme de 0 à n de $\displaystyle\binom{n}{k}(-1)^k$. Deux matrices de même déterminant mais de trace différente sont-elles semblables ?

Planche 64 (2011, Cachan — élève 1)

1) Soit l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, on donne dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la surface S d'équation :

$$x^2 + y^2 - 14xy + 4z^2 - 8yz - 2x + 2y - 4z = 0$$

- **a)** Soit l'intersection de la surface S avec le plan d'équation $z = 0$. Montrer qu'il s'agit d'une courbe classique, determiner ses caractéristiques puis la tracer.
- **b)** Determiner le type de S et son équation réduite dans un certain repère orthonormé que l'on précisera.

2) Cours : Énoncer le critère des séries alternées, y compris les propriétés du reste.Théorème de Dirichlet, y compris le cas où f est continue.

Planche 65 (2011, Cachan — OT 231)

1)
- **a)** Donner, en fonction de ceux de $P \in \mathbb{R}[X]$, le degré et le coefficient dominant de $\varphi(P)(X) = \dfrac{1}{2}(P(X+1) + P(X-1))$.
- **b)** Montrer qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P_n) = X^n$. Calculer P_0, P_1, P_2, P_3.
- **c)** Pour $n \geqslant 1$, exprimer P' en fonction de P_{n-1} et en déduire $P_n^{(k)}$ en fonction de P_{n-k} pour $k \leqslant n$. Montrer que P_n et n ont même parité.

2) Cours : Théorème de Jordan-Dirichlet.

Planche 66 (2011, Cachan — OT 232)

1)
- **a)** Donner la différentielle de $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$.
- **b)** Déterminer $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{d}v = (y^2 - x)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y$. En déduire une équation implicite vérifiée par les solutions $y : x \mapsto y(x)$ de l'équation différentielle $(y^2 - x)y' = y$.
- **c)** Tracer $\mathscr{C}$ pour $y(0) = 3$.

2) Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$.

3) Cours : Définir un espace vectoriel.

Planche 67 (2011, Cachan — OT 234)

1) Soit f définie par $f(P)(X) = (X-a)(b-X)P' + nXP$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixés et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- **a)** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- **b)** Pour $a \neq b$, calculer α et β en fonction de a et b tels que $\dfrac{nt - \lambda}{(t-a)(t-b)} = \dfrac{\alpha}{t-a} + \dfrac{\beta}{t-b}$.
- **c)** Pour $a = b$, calculer γ et δ en fonction de a tels que $\dfrac{nt - \lambda}{(t-a)^2} = \dfrac{\gamma}{t-a} + \dfrac{\delta}{(t-a)^2}$
- **d)** Déterminer les éléments propres de f. Est-il diagonalisable ?

2) Cours : Critère des séries alternées.

Planche 68 (2011, Cachan — OT 235)

1) On note T_t la tangente au point $M(t)$ de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ et $z(t) = t^3$.

a) Déterminer un paramétrage de la surface S engendrée par la réunion des droites T_t.

b) Trouver les points de S où la normale est nulle. Donner l'équation du plan tangent à S en un point régulier et montrer qu'il ne varie pas le long d'une génératrice. Comment nomme-t-on ce type de surface ?

2) Cours : Théorème de Dirichlet ; coefficients de Fourier ; qu'est-ce qu'une fonction $\mathscr{C}^1$ par morceaux ? À quelles conditions un endomorphisme est-il diagonalisable ? Citer une condition suffisante. Une matrice symétrique réelle est-elle diagonalisable ?

Planche 69 (2011, Cachan — OT 236)

1) Soit f et g deux projecteurs d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, non colinéaire l'un à l'autre, et vérifiant

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \qquad f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$$

On suppose $\lambda \notin \{0, 1\}$.

a) Montrer que $f \circ g(x) \in \operatorname{Im} g$ pour tout x, et que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.

b) Montrer que $fg = f$ et que $\lambda + \mu = 0$. En déduire une contradiction.

c) Étudier les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

2) Convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n} t \, dt$. Calculer I_0 et donner une méthode pour calculer I_n.

Planche 70 (2011, Cachan — OT 237)

1) Résoudre $\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) + y(t) + \dfrac{2e^{4t}}{1+e^t} \\ y'(t) &= x(t) + 2y(t) \end{cases}$

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, calculer $\det \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ en fonction de $\det A$, a, b, c et d.

3) Étudier $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln n}$.

Planche 71 (2010, Cachan — OT 1, corrigé)

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

a) Trouver les valeurs possibles des valeurs propres de A, carrée d'ordre n, vérifiant $2A^2 = A + I_n$.

b) Montrer qu'il existe (a_k) et (b_k) deux suites réelles que l'on précisera, et (P_k) une suite de $\mathbb{R}[X]$ tels que $X^k = (2X^2 - X - 1)P_k(X) + a_k X + b_k$.

c) Montrer que A^k converge vers une matrice B que l'on déterminera.

d) Montrer que B est un projecteur dont on donnera les éléments caractéristiques.

2) Cours : définition des suites adjacentes, formule de Taylor-Young (énoncé et preuve).

Planche 72 (2010, Cachan — OT 2)

1) Soit (a_n) et (b_n) les coefficients de Fourier de f, continue par morceaux 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_n et b_n en fonction de $c_n = \dfrac{1}{2}(a_n - ib_n)$ et $c_{-n} = \dfrac{1}{2}(a_n + ib_n)$. On pose $c_0 = a_0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comparer la somme partielle S_n de rang n de la série de Fourier f et $x \mapsto T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$. Exprimer c_n à l'aide d'une intégrale.

c) Exprimer S_n si f est définie par $f(x) = e^x$ sur $[0, 2\pi[$.

d) En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$.

2) Cours : CNS de diagonalisation ; hypothèse et formule de Taylor-Young pour une fonction de deux variables.

Planche 73 (2010, Cachan — OT 3, corrigé)

1) Soit (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 1$ et donner le sens de variation de (u_n). Montrer par l'absurde que (u_n) ne converge pas.

b) Quelle est la limite de la suite de terme général $v_n = u_n^2 - u_{n-1}^2$?

c) Montrer que la suite de terme général $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k$ a la même limite que (v_n) et en déduire un équivalent de (u_n).

2) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

3) Cours : Théorème de Parseval ; formule du binôme de Newton (énoncé + preuve), calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}$.

Planche 74 (2007, Cachan — OT 178)

1) Pour $k \in]-1, +\infty[$ et $0 < x < 1$, montrer que $\left|\dfrac{x^k}{1+x} - \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+k}\right| \leqslant x^{N+k+1}$.

2) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^k}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+k+1}$. On pourra poser $I_N = \displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{n+k}\,\mathrm{d}x$.

3) Soit $0 < r < 1$. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{x^{r-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^{r-1}}{1+x} = \int_0^1 \frac{t^{-r}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

4) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{r-1}}{1+x} = \frac{1}{r} + r\sum n \geqslant 1\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-r^2}$.

5) Série de Fourier de $g(x) = \cos(rx)$ sur $[-\pi, \pi]$ et 2π-périodique. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{r-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin(\pi r)}$.

Planche 75 (2007, Cachan — OT 179)

1) Prouver que φ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(X) = -X + \mathrm{Tr}\,(X)A$ où A est une matrice fixée non nulle, est un endomorphisme.

2) Prouver que φ est non injectif si et seulement si $\mathrm{Tr}\ A = 1$.

3) Pour $\mathrm{Tr}\ A \neq 1$, combien l'équation $\varphi(X) = B$ a-t-elle de solutions ? Calculer la trace de ces solutions, puis résoudre cette équation.

4) Pour $\mathrm{Tr}\ A = 1$, calculer $\mathrm{Tr}\ \varphi(X)$. Montrer que φ est le projecteur sur l'espace des matrices de trace nulle, puis résoudre l'équation $\varphi(X) = B$.

Planche 76 (2007, Cachan — OT 180)

1) Montrer que $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Donner ses extrema et préciser en quels points ils sont atteints.
En déduire que $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ est bornée sur $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^2$. La fonction f admet-elle un maximum ? Un minimum ?

2) Cours : développée, développante (formule). Formule de Parseval (en précisant les hypothèses).

3 Petites Mines

Planche 77 (2012, Mines — élève 1)

1) On étudie la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

- **a)** Déterminer le rayon de convergence.
- **b)** Écrire $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ sous la forme $\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$.
- **c)** Écrire f à l'aide de fonctions usuelles.

2) Soit Σ la surface $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 1$

- **a)** Nature de la surface.
- **b)** Symétries et plans de symétrie de Σ.
- **c)** Plan orthogonal à la surface.

Planche 78 (2012, Mines — élève 2)

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

- **a)** Montrer que A est diagonalisable et donner la matrice de passage P.
- **b)** Soit M appartenant à l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels telle que $M^2 + M = A$.
  Montrer que $P^{-1}MP$ est diagonale.
- **c)** Donner les solutions de $M^2 + M = A$.

2) Soit $x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$ et $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$.

- **a)** Tracer la courbe.
- **b)** Calculer la longueur de la courbe.
- **c)** Déterminer la courbure pour tout $t \in]0, 2\pi/3[$.

Planche 79 (2012, Mines — élève 3)

1) Cours : Donner la nature de la quadrique $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 1$. Énoncer le critère d'Alembert pour les séries entières.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(M) = AMA$.

- **a)** Donner la matrice Φ de φ dans la base $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.
- **b)** Calculer $\varphi(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, puis pour $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- **c)** Φ est-elle diagonalisable ?
- **d)** Diagonaliser Φ.

3)
- **a)** Résoudre $X^2 + (-2 + 3i)X - 2(1 + 2i) = 0$.
- **b)** Résoudre $y'' + (-2 + 3i)y' - 2(1 + 2i)y = 2\cos(x)e^{2x}$.

Planche 80 (2012, Mines — élève 4)

1) Cours : Donner la définition des coefficients de Fourier. Nature de la quadrique $z = x^2 - 3y^2$.

2) Soit $X = (x, y, z, t)$ et $X' = (x', y', z', t')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$, et $\varphi(X, X') = xx' + 2yy' + 3zz' + tt' + xy' + x'y + xz' + zx' + yz' + zy'$.

- **a)** Montrer que φ est un produit scalaire.
- **b)** Donner une base orthogonormée pour ce produit scalaire.

3) Soit $f(x, y) = x^2y^2$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad |x| + |y| \geqslant 1\}$.
Calculer $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Planche 81 (2012, Mines — élève 5)

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\operatorname{Arctan}(xt)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que f est définie pour tout $x \geqslant 0$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution positive.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A.

b) Quelle est la nature de la surface $4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4 = 0$? Quand a-t-on une surface de révolution ?

Planche 82 (2012, Mines — élève 6)

1) **a)** Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$ converge.

b) Calculer le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ et calculer sa somme.

c) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

2) Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ si et seulement si $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$, et que dans ce cas $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.

Planche 83 (2012, Mines — élève 7)

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

a) Montrer qu'il existe une base de E telle que $M_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Déterminer les endomorphismes g de E tels que $fg = gf$.

2) **a)** Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$ converge pour $\alpha \in]0, \pi[$.

b) En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{\cos t}$, calculer l'intégrale.

Planche 84 (2012, Mines — élève 8)

1) Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & -b & c \\ b & a-2c & b \\ c & -b & a+b \end{pmatrix} \ \middle|\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, calculer sa dimension. Est-ce une sous-algèbre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2) Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $\dfrac{\cos(2n\pi/3)x^n}{n}$.

Planche 85 (2012, Mines — élève 9)

1) Pour $n \geqslant 2$ entier on pose f_n la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

a) Montrer que $f_n(x) = 0$ a une unique solution, que l'on notera x_n.

b) Étudier les variations de (x_n) pour tout $n \geqslant 2$.

c) Montrer que (x_n) converge, calculer sa limite.

d) Trouver un équivalent de (x_n) pour $n \to +\infty$.

e) Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de (x_n).

2) Chercher les matrices carrées réelles d'ordre n vérifiant $A^t A A = I_n$.

Planche 86 (2012, Mines — élève 10)

1) Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Montrer que $p \leqslant n$.

2) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de limite ℓ lorsque $x \to +\infty$.
Soit y une solution de $y' + y = g$. Montrer que y tends vers ℓ quand $x \to +\infty$.

Planche 87 (2012, Mines — élève 11)

1) Cours : Nature de la conique $z = x^2 + 2y^2$. Énoncer le critère de D'Alembert.

2) La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{\operatorname{sh} t}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

3) Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$

a) La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

b) Réduire A_4.

c) Réduire A_n.

Planche 88 (2011, Mines — élève 1)

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$. Posons $B_n = (A_n)^n$ avec $A_n = \begin{pmatrix} \frac{a}{n} & 1 \\ 1 & \frac{a}{n} \end{pmatrix}$.

Expliciter $\lim\limits_{n \to +\infty} B_n$.

2) **a)** Nature de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$, $a \in \mathbb{R}_+^*$, puis de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Soit $u_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

c) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Planche 89 (2011, Mines — élève 2)

Soit $\mathscr{C}$ définie par $x = -2\sin t - \cos t \sin t - t$ et $y = (1 - \cos t)^2$. Tracer la courbe sur $[-\pi, \pi]$. Abscisse curviligne et longueur d'un arc.

Planche 90 (2011, Mines — élève 3)

1) Nature des séries de terme général :

a) $u_n = \dfrac{1}{\ln n}$ **b)** $v_n = \dfrac{n^2}{\ln n}$ **c)** $w_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)$

2) Soit P un polynôme de degré 3 : $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Soit $\mathscr{E}$ la courbe plane définie par $P(x) = P(y)$.
Montrer que $\mathscr{E}$ est la réunion d'une droite et d'une conique que l'on précisera.

Planche 91 (2011, Mines — élève 4)

1) Soit $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, donner le domaine de définition de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En notant que $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(n+1)!}$, exprimer $S(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

2) Soit $D = [0, 1]^2$, calculer $\displaystyle\iint_D |x - y^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Planche 92 (2011, Mines — élève 5)

1) On a $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

a) Convergence de $f(x)$. Limite de f en 0.

b) Montrer que f st $\mathscr{C}^1$ et déterminer f'.

c) Trouver une relation entre f' et f.

d) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, déterminer f.

2) Trouver les fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, si on pose $z(x,y) = f(y/x)$, on a $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{y}{x^3}$.

Planche 93 (2011, Mines — élève 6)

1) Analyse : Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\big(\frac{1+t^2}{t^2}\big)\,\mathrm{d}t$. Existence puis calcul de I.

2) Algèbre : Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon a, et le point $A(c,0)$ avec $0 < c < a$.
Déterminer l'enveloppe des droites Δ telles que le projeté orthogonal de A sur Δ appartienne à $\mathscr{C}$.

Planche 94 (2011, Mines — élève 7)

Soit f dans $\mathscr{L}(E)\backslash\{0\}$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, vérifiant $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$.
Montrer que $f^3 + f = 0$.
Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id}) \geqslant 1$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{id})$ non nul, montrer que la famille $(x, f(x))$ est libre.
Quelles sont les valeurs possibles de $\det f$?
Trouver une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver les $g \in \mathscr{L}(E)$ qui commutent avec f tels que $g^2 = f$.