Exercice 1 (OT 2009)

1) Résoudre l'équation aux dérivées partielles $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}-2f+2=0$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, en utilisant le changement de variables $u=xy$ $v=\dfrac{y}{x}$.

2) Trouver les extrema locaux de $f(x,y)=(2+\cos x)(2+\cos y)$.

Exercice 2 (2011, Centrale TSI — OT 263)

Étudier et tracer la courbe $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \cos^2 t+\ln(\sin t) \\ y(t) & = & \cos t\sin t \end{array}\right.$.

Calculer la longueur de la courbe entre les deux points de rebroussement.

Exercice 3 (OT 2009 — ENSAIT, 270)

1) Étude en $t=1$ de la courbe d'équation $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ y & = & \displaystyle\int_1^t \frac{u^2-1}{u^3+1}\,\mathrm{d}u \end{array}\right.$

2) Donner la limite ℓ de la suite $u_n=(n\sin\dfrac{1}{n})^n$ et la nature de la série de terme général $u_n-\ell$.

Exercice 4 (OT 2009 — petites mines, 273)

Étudier et tracer la courbe paramétrée d'équations $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\sin^2(t)}{2+\sin t} \\ y & = & \cos t \end{array}\right.$

Donner l'aire de la partie du plan limitée par la courbe.

Exercice 5 (2012, ENSAM — OT 264)

Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^4+y^4=1$.

1) Montrer que $\mathscr{C}$ est bornée, étudier ses symétries.

2) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $M(x_0,y_0)$ et en déduire les tangentes à $\mathscr{C}$ en un point de l'axe des abscisses et en un point de l'axe des ordonnées.

3) Représenter $\mathscr{C}$ et le cercle unité dans un même repère.

4) Déterminer la distance minimale entre l'origine et la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 6 (OT 2009 — petites mines, 275)

Déterminer, suivant les valeurs de m, la nature de la quadrique d'équation

$$x^2+y^2-z^2-8z(x+2y)+x+2y-2z=m$$

Exercice 7 (2012, ENSAM — élève 5)

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(1,1,0)$ et de direction $u(1,1,1)$.

1) Déterminer une équation de la surface de révolution S_1 engendrée par la rotation de $\mathscr{D}$ autour de l'axe (Oz).

2) Soit S_2 la surface d'équation $x^2+y^2=(z+1)^2+1$. Décrire cette quadrique.

3) Déterminer l'intersection de S_1 et de S_2.

4) Déterminer le volume de la portion d'espace vérifiant $x^2+y^2\leqslant(1+z)^2+1$ et $x^2+y^2\geqslant 2(1+z)^2$.

Exercice 8 (2011, TSI — OT 268)

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$ fixé. Soit Σ la surface d'équation $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & t\cos\theta \\ z & = & a\sin\theta \end{array}\right.$ et Σ' la surface d'équation $a^2(x^2-y^2)=x^2z^2$.

1) Montrer que $\Sigma\subset\Sigma'$. Y a-t-il égalité ? On pourra considérer les points $A(0,0,\alpha)$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

2) Déterminer les points singuliers de Σ et de Σ' (i.e. de deux façons).

3) Nature des courbes $\Sigma\cap(z=z_0)$ et $\Sigma\cap(x=x_0)$.

Exercice 9 (OT 2009 — petites mines, 278)

1) Déterminer la surface $\mathscr{S}$ constituée des points équidistants aux droites $\mathscr{D}:(x=0,y=0)$ et $\mathscr{D}':(z=0,x+y=a)$.

2) Existence de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n-1)}$. Calcul exact de la somme.