Exercice 1 (2013, ENSAM)
Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f(x) = \dfrac{x}{2} + 1$. Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ \forall n,\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \text{ et } v_n = u_n - 2$$

1) Montrer que v est géométrique, et en déduire la limite de u.

2) Écrire $f \circ f \circ f$ de deux manières différentes, et en déduire que $f'\left(\dfrac{x}{2} + 1\right) = f'(x)$ pour tout x.

3) Montrer que $f'(x)$ ne dépend pas de x. En déduire f.

Exercice 2 (2013, ENSAM)
Pour $n \geqslant 1$, on note : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^n(t)}\,\mathrm{d}t$

1) Étudier la convergence de I_n.

2) Calculer I_1. Rappeler la forme de la dérivée de $\tanh(t)$. Calculer I_2.

3) Établir une relation de récurrence entre les termes I_n et I_{n+2}.

Exercice 3 (2013, ENSAM)
Pour tout $n > 0$ entier naturel, on considère l'équation : $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$

1) Montrer qu'il existe sur $[0, +\infty[$ une unique solution, notée a_n.

2) Montrer que $(a_n)_n$ est décroissante.

3) Montrer que $(a_n)_n$ converge vers une limite ℓ. Estimer $a_n^{n+1} - 1$ et déterminer ℓ.

4) On note $u_n = a_n - \ell$. Calculer u_1 et u_2.
Déterminer un équivalent de u_n (montrer que $nu_n = o(1)$)

Exercice 4 (2013, Petites mines — Lyon)
Pour $n \geqslant 2$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}(-1)^n}$.

1) Nature de la série de terme général u_n.

2) Déterminer le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

3) La somme de la série entière est-elle continue au bord de l'intervalle de convergence ?

Exercice 5 (2013, ENSAM)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $t \in D$, $f(t) = \dfrac{\sin^2(nt)}{\sin(t)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2) Montrer que $\forall t \in D,\ f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin((2k-1)t)$.

3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt \sim_{+\infty} \frac{\ln(n)}{2}$.

Exercice 6
On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

2) Soit $N \geqslant 1$, établir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t + r_N$, où $r_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

3) Déterminer la somme de la série du 1.

Exercice 7 (2012, Mines — élève 5)

1) Monter que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\operatorname{Arctan}(xt)}}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \geqslant 0$, et que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

2) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution positive.

Exercice 8 (2013, Cachan PT — Lyon)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que f est bien définie et continue.

2) Montrer que : $xf(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$

3) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et que : $xf'(x) = f(x) - 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$

4) Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$, déterminer un équation différentielle satisfaite par f, et en déduire f.

Exercice 9 (OT 2007 — ENSAM PSI, 170)

1) Calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$.

2) Exprimer sa somme f à l'aide de fonctions usuelles et étudier le comportement de f aux bornes de son intervalle de définition.

Exercice 10 (2013, ENSAM)

Soit $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

1) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre et donner cette équation.

2) Chercher un développement en série entière de f.

Exercice 11 (2013, ENSAM)

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$

Exercice 12 (OT 2006 — AADN, 429)

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\pi)^n}{(2n+1)!}$. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{\operatorname{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13

Résoudre $y'' + y' + y = t^2 + e^t$.

Exercice 14 (OT 2007 — TSI, 201)

1) Trouver les coefficients de Fourier de $f(x) = |\sin x|$ et étudier la convergence de la série de Fourier.

2) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 15 (2013, ENSAM — élève)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F(x,y) = \displaystyle\int_{-x}^{y} f(2x+t)e^{x+t}\,\mathrm{d}t$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1) Montrer que F est bien définie et $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (on pourra effectuer un changement de variable).

2) Trouver une CNS sur f pour que F soit solution de l'EDP :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial F}{\partial x} - 4\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + F = 1$$

3) En déduire f.

Exercice 16

Différentielle de $(x,y) \mapsto < x, y >$.