Révisions : Analyse

Exercice 1 (OT 2007 — d'après ENSAM PSI, 167)

1) Soit $a \in]0,1[$, $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + a u_n)$. Limite de (u_n).

2) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_1 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n u_n}$ tend vers $+\infty$.

3) Convergence et limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$.

Exercice 2 (2011, Petites Mines MP — OT 203)

Calculer $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{Arctan}(t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$. (on se contentera d'expliquer la méthode sans détailler les calculs).

Exercice 3

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,e^{-t/2}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\frac{1-e^{-1}}{3}}$.

Exercice 4 (2011, ENSAM PSI — OT 218)

Soit $u_n = \dfrac{e^{-u_n}}{n}$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $0 < u_n < \dfrac{1}{n-1}$. En déduire un équivalent de (u_n) en $+\infty$.
Étudier la convergence de $\sum u_n$ et $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 5 (OT 2010 — ENSAM PSI, 245)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = ((1 - \frac{1}{n})^{-n} - e)^a$, puis celle de $(-1)^n u_n$.

Exercice 6 (OT 2010 — ENSEA, 252)

Nature des séries numériques $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 7

On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.

2) Soit $N \geqslant 1$, établir que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t + r_N$, où $r_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$.

3) Déterminer la somme de la série du 1.

Exercice 8 (2012, Mines — élève 5)

1) Monter que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\operatorname{Arctan}(xt)}}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \geqslant 0$, et que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

2) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution positive.

Exercice 9 (OT 2010 — ENSAM PSI, 248)

Trouver une solution non nulle développable en série entière de l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$.
Trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}\operatorname{ch}\sqrt{x}}$ et en déduire toutes les solutions de l'équation considérée.

Exercice 10 (OT 2010 — ENSAM PSI, 241)

1) Ensemble de définition de $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

2) Montrer que g est solution d'une équation différentielle et en déduire son développement en série entière.

Exercice 11

Développer $\dfrac{1}{2+x}$ en série entière. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$

Exercice 12 (OT 2007 — ENSAM PSI, 170)

1) Calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$.

2) Exprimer sa somme f à l'aide de fonctions usuelles et étudier le comportement de f aux bornes de son intervalle de définition.

Exercice 13
Pour tout $x \in]-1,1[$ on pose $f(x) = \dfrac{\text{Arcsin } x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) Déterminer une équation différentielle d'ordre 1 satisfaite par f.

2) En déduire le développement en série entière de f, dont on précisera le rayon de convergence.

Exercice 14
Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$. On pourra établir une relation de récurrence.

Exercice 15 (OT 2006 — ESB PSI, 262)
Étudier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16 (OT 2006 — AADN, 429)
Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\pi)^n}{(2n+1)!}$. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t}{\text{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17
Résoudre $y'' + y' + y = t^2 + e^t$.

Exercice 18 (OT 2007 — TSI, 201)

1) Trouver les coefficients de Fourier de $f(x) = |\sin x|$ et étudier la convergence de la série de Fourier.

2) Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 19 (D'après ENSAM)
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit g sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par

$$g(x,y) = \frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Étudier la continuité de g et montrer qu'elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 20 (OT — ENSAM)
On se place dans $\mathbb{R}^2$ euclidien. Soit A le point de coordonnée $(a,0)$ et B de coordonnées $(0,b)$.
On désigne par $f(x,y)$ le carré du produit des distance du point $M(x,y)$ à chaque coté du triangle ABO.
Montrer que f admet un maximum et un minimum dans le triangle plein.
Déterminer le maximum de f à l'intérieur de ABO, cotés exclus.

Exercice 21
Différentielle de $(x,y) \mapsto < x, y >$.

Exercice 22
Soit a et b deux réels strictement positifs.

1) Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On pose désormais $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

2) Montrer que $I(a,b) = -I(b,a)$ et que $I(a,b) = I(1, b/a)$.

3) On note F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que F est bien définie, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,+\infty[$ et calculer F'.

b) Que vaut alors $F(x)$?

4) En déduire la valeur de $I(a,b)$ en fonction de a et b.