Révisions : Algèbre Linéaire

Exercice 1
Soit $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = z + t = 0\}$. Monter que E est un espace vectoriel et en déterminer une base.

Exercice 2
Soit φ défini sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(M)I_n + M$.

1) Vérifier que φ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer le noyau et le rang de φ. L'endomorphisme est-il bijectif ?

3) Vérifier que $\varphi^2 - (n + 2)\varphi + (n + 1)\,\mathrm{id}_E = 0$. En déduire une expression de φ^{-1}.

4) Quelles sont les valeurs propres possibles de φ ? Déterminer les sous-espaces propres associés. φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel, et u et v deux endomorphismes de E.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\ u \subset \mathrm{Ker}\,(v \circ u)$, puis que

$$\mathrm{Ker}\,(v \circ u) = \mathrm{Ker}\ u \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\ u \cap \mathrm{Ker}\ v = \{0\}$$

2) Montrer que $\mathrm{Im}\,(v \circ u) \subset \mathrm{Im}\ v$, puis que

$$\mathrm{Im}\,(v \circ u) = \mathrm{Im}\ v \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\ u + \mathrm{Ker}\ v = E$$

3) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes

a) $E = \mathrm{Ker}\ u \oplus \mathrm{Im}\ u$ **b)** $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Ker}\ u^2$ **c)** $\mathrm{Im}\ u = \mathrm{Im}\ u^2$

Exercice 4 (CCP 2011 OT PSI 194.1)
Soit f un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie, tel que $f + f^4 = 0$. Montrer que

$$E = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f$$

Exercice 5 (D'après ENSAM)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, x_0 un vecteur non nul de E et φ une forme linéaire non nulle sur E. Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = \varphi(x)x_0$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de E, puis déterminer son rang.

2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur.

Exercice 6 (CCP 2011 OT PSI 188.1)

1) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'ordre k. Montrer que $\mathrm{id} - f$ est inversible et donner son inverse en fonction de f.

2) Soit $U \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ défini par $U(P) = P - P'$. Résoudre $U(P) = X^n$.

Exercice 7 (Mines – Ponts 2011 OT PSI 156.2)
Pourquoi la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & \ddots & & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Trouver son inverse.

Exercice 8 (OT 2006 — CCP MP, 131)
Soit a, b et c des réels, et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

1) Dans cette question, et uniquement dans cette question, on suppose a, b et c tous non nuls. Déterminer le rang de A, en déduire la dimension du noyau de A.

2) La matrice est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$? Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$? Pouvait-on prévoir dès le 1) que 0 serait valeur propre ?

Exercice 9
Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A et T sont semblables.

2) Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10
Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' &= x + y - z \\ y' &= 2x + 3y - 4z \\ z' &= 4x + y - 4z \end{cases}$

Exercice 11 (Petites Mines 2011 OT PSI 230.1)
Soit $\delta \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^3$ un vecteur fixé. Donner la forme polaire de q, définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(X) = \|X\|^2 - \delta(X|A)^2$$

Pour $\delta = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, trouver une base orthonormale pour q et donner la nature de la quadrique $q(X) = 1$.

Exercice 12
Réduire les coniques et quadriques suivantes, puis donner leur nature :

1) $xy + 3x + 5y - 4 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2x - 5 = 0$

3) $(x + y)(y - z) + 3x - 5y = 0$

Exercice 13 (D'après ENSAM PSI)
Déterminer la nature géométrique de l'application linéaire u canoniquement associée à

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 (OT 2010 — ENSAM PSI, 240)
On munit $E = \mathscr{C}^0([0, \pi])$ du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Calculer $(\cos t|\sin t)$, $\|\cos t\|$, $\|\sin t\|$, $(t|\cos t)$ et $(t|\sin t)$.

2) Déterminer la projection orthogonale de l'application $t \mapsto t$ sur $\mathrm{Vect}\,(\cos, \sin)$.

3) Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a\cos t + b\sin t - t)^2\,\mathrm{d}t$.

4) Reprendre avec Maple toutes les questions précédentes.

Exercice 15 (OT 2010 — ENSAM PSI, 243)
Soit $u \in \mathbb{R}^3$ et f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x) = x \wedge u$.

1) Montrer que f est linéaire. Déterminer le noyau et l'image de f.

2) En utilisant une base adaptée, déterminer $f \circ f$ et en déduire f^n.

Exercice 16 (OT 2006 — CCP MP, 127)

1) Soit u, v deux endomorphismes d'un espace vectoriel. Si $\lambda \neq 0$ est valeur propre de $u \circ v$, montrer qu'il l'est aussi de $v \circ u$.

2) Soit $P \in E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $v(P) = \displaystyle\int_0^x P(t)dt$. Trouver Ker $u \circ v$ et Ker $v \circ u$. Montrer que la propriété précédente reste valable pour $\lambda = 0$ si E est de dimension finie.

Exercice 17
Déterminer l'équation du cylindre de révolution d'axe $x = y = z$ tangent à la droite Δ d'équations $x = 1 + z$ et $y = 1 - z$.