Exercices : Quadriques

Exercice 1
Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

1) Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, exprimer $\varphi(x, y)$ en fonction des x_i, des y_i, et de $a_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$. Donner une expression matricielle de la formule obtenue.

2) La forme φ est désormais supposée symétrique. Que peut-on dire de la matrice A obtenue en 1 ? Simplifier l'expression en les x_i et les y_i obtenue à la question précédente.

3) Soit $\mathscr{B}'$ une nouvelle base de $\mathbb{R}^n$ et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
Écrire la matrice A' de φ dans la nouvelle base $\mathscr{B}'$. On pourra s'aider de la formule matricielle trouvée en 1.

4) On s'intéresse à $\Phi : x \mapsto \varphi(x, x)$, la *forme quadratique* associée à φ.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ telle que $\Phi(x)$ soit une combinaison linéaire des $x_i'^2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

5) Application : Soit Φ la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\Phi(x, y, z) = y^2 + 2xz$. Déterminer une transformation orthogonale $u(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ telle que Φ soit une combinaison linéaire de carrés.

Exercice 2
À l'aide de l'exercice précédent, en commençant par réduire la forme quadratique associée, donner l'équation réduite et représenter la courbe (ou nommer la surface) pour chacune des équations suivantes

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 10y + 4 = 0$ **2)** $x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0$ **3)** $3x^2 + 4xy + 6y^2 + 2\sqrt{5}x = 1$

4) $x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 4xy - 8yz + 2zx + y + z = 0$ **5)** $3x^2 - z^2 + 2xy + 2yz + 2zx - 2x - 8y + 6z = 0$

6) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2zx + 4x - 2y + z + 1 = 0$ **7)** $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) = 1$

Exercice 3 (CCP TSI 2010)
On muni un plan euclidien d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation $3x^2 + 13y^2 - 10\sqrt{3}xy = 2$ et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

1) Montrer qu'il existe un repère orthonormé direct $(O, \vec{I}, \vec{J})$, que l'on ne cherchera pas à déterminer, dans lequel la courbe $\mathcal{H}$ a pour équation $18X^2 - 2Y^2 = 2$.

2) Justifier que $\mathcal{H}$ est une hyperbole et préciser son excentricité.

3) Reconnaître la courbe $\mathscr{C}$. En déduire une équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

4) Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathcal{H}$ se coupent en quatre points A, B, C et D dont on donnera les coordonnées dans $(O, \vec{I}, \vec{J})$. Prouver que ces quatre points forment un rectangle.

5) Donner les coordonnées des sommets, les équations des asymptotes et les équations des tangentes aux sommets de l'hyperbole dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

6) Représenter graphiquement tout ça.

Exercice 4 (d'après écrits PT)
Soit θ un réel. On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $2\,\mathrm{sh}\,(\theta)x^2 + y^2 + 2xz - 2y = 0$.

1) Montrer que le point Ω de coordonnées $(0, 1, 0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{S}$.

2) Déterminer un repère de $\mathbb{R}^3$ dans lequel $\mathscr{S}$ a pour équation $X^2 + e^{\theta}Y^2 - e^{-\theta}Z^2 = 1$.

3) Quelle est la nature de $\mathscr{S}$? Est-elle de révolution ?