

Exercice 1

La fonction suivante est-elle continue sur \mathbb{R}^2 : $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 2

On définit la fonction $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } y < x \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ (Indication : Chercher une expression de f sans « si »).
- 2) Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0, 1] \times [0, 1]$, les déterminer.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 . Est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 4

Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x, y) = (x - y, x + y)$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Déterminer $\frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x}$ et $\frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial y}$.

Exercice 5

On note $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \Omega \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2$$

On utilisera le changement de variable $u = x + y$ et $v = xy$.

Exercice 6

Soit $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ sur \mathbb{R}^2 et $g : (x, y) \mapsto \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

- 1) Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^2 sur leur ensemble de définition, puis étudier leurs extrema locaux.
- 2) Étudier les extrema globaux de f sur $\overline{D(0, 4)}$ et de g sur $K = [0, 1]^2$

Exercice 7 (OT 2011 — ENSAM PT)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f : (x, y) \mapsto xy \ln(x^2 + y^2)$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$. Tracer la surface (avec python) et déterminer ses extrema.

Exercice 8

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On commencera par donner la structure de l'espace des solutions, et on utilisera le changement de variable $x = u - v$ et $y = v$.