Exercices : Intégration

Exercice 1 (D'après ENSAM — L 1)
Pour tout entier n on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que (u_n) est décroissante.

2) Calculer $u_{n+2} + u_n$

3) Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 2
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 3 (Formule de la moyenne)
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues avec $g \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 (*)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{U})$, et $g : I \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = ib + \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$, où $b \in \mathbb{R}$ est un argument de $f(a)$.

1) Vérifier que g est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

2) Soit $h : I \to \mathbb{C}$ définie par $h(x) = f(x)\exp(-g(x))$. Calculer h' et en déduire h.

3) Montrer qu'il existe une fonction $\theta : I \to \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$, telle que $f = e^{i\theta}$.

Exercice 5
On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{sh}\,(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.
Déterminer le domaine de définition, prolonger en 0, la dérivabilité, la dérivée, les variations puis la limite en $+\infty$.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^x e^{-(xt)^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$. Montrer que f est dérivable et calculer f'.

Exercice 7
Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t^3}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \frac{t-1}{(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t$

<u>Indication</u> : *Penser aux DL.*

Exercice 8

1) Calculer la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x\right)_n$.

2) Trouver une suite de fonctions f_n continues sur $[0,1]$ telles que pour tout $x \in [0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, mais aussi telles que $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ ne tende pas vers 0. <u>Indication</u> : *On pourra faire un dessin.*

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Calculer la limite de la suite $\left(n\displaystyle\int_0^1 e^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}x\right)_n$. Que peut-on dire si f est $\mathscr{C}^1$?

Exercice 9
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $T > 0$.

1) On suppose qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t = K$. Montrer que f est T-périodique.

2) Montrer la réciproque.

3) On suppose que f est T-périodique et d'intégrale nulle sur une période. Montrer que F, une primitive de f, est T-périodique. Est-ce toujours vrai en supposant seulement f périodique ?

Exercice 10 (Théorème de Riemann-Lebesgue)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Montrer que $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ist}\,\mathrm{d}t = 0$.

2) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, T-périodique, d'intégrale nulle sur une période.
Montrer que $\lim\limits_{s\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t = 0$.

3) On ne suppose plus que φ est d'intégrale nulle. Déduire de la question précédente que

$$\lim_{s\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(st)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $x \mapsto \int_a^{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t} f(u)\,\mathrm{d}u$ est dérivable puis calculer la dérivée.

Exercice 12
Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f'(x) \in [0,1]$ pour tout x, et $f(a) = 0$. On définie la fonction F par

$$F(x) = \int_a^x f^3(t)\,\mathrm{d}t - \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

1) Déterminer les variations de F.

2) Monter que $\int_a^b f^3(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$.

Exercice 13 (*)
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1) Pour tout $x > 0$ montrer que $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$ (<u>Indication</u> : *faire un dessin*).

2) En déduire que $\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \geqslant ab$, l'égalité se produisant si et seulement si $b = f(a)$.

Exercice 14 (Primitives)
Déterminer des primitives des fonctions suivantes sur des intervalles que l'on précisera :

1) $\dfrac{1}{ix-1}$ **2)** $\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+x+1}$ **3)** $\dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ **4)** $\dfrac{\cos x}{\sin(x)+1}$

5) $\cos^2 x \sin^4 x$ **6)** x^2e^{-3x} **7)** $(x^2+x+1)\cos(2x)$ **8)** $x \operatorname{Arctan} x$

Exercice 15 (Cours)
Nature des intégrales :

1) $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; **2)** $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{d}t$ où $\beta \in \mathbb{R}$ **3)** $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; **4)** $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$

Exercice 16 (un exemple)
Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ défini par $f(x) = 0$ sauf sur les intervalles de la forme $\left[n - \dfrac{1}{2^n}, n + \dfrac{1}{2^n}\right]$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) où la courbe $\mathscr{C}_f$ forme un triangle de hauteur 1.
Faire un dessin. Encadrer $\int_0^X f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $X \in \left[n - \dfrac{1}{2}, n + \dfrac{1}{2}\right]$. En déduire que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Construire sur ce modèle une fonction g définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, non bornée au voisinage de $+\infty$ telle que $\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 17
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3-5t^2+1}{2t^4+2t^3+t^2+1}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)+e^t}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-t^2}{1-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ **5)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{\sqrt{|t^2-1|}(\sqrt{t}+2)}\,\mathrm{d}t$

7) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ **8)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-zt}\,\mathrm{d}t$, où $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$. **9)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 18 (Intégrales de Bertrand)
Pour $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ on étudie la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$.

1) On suppose $\alpha\neq 1$. Étudier la limite de $\dfrac{t^{\frac{1+\alpha}{2}}}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ lorsque $t\to+\infty$. En déduire la nature de l'intégrale.

2) Étudier le cas $\alpha=1$. Conclure.

3) Déduire du cas $\alpha=1$ la nature de $\displaystyle\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de β.

4) Déduire de l'étude précédente la nature de $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha|\ln t|^\beta}\,\mathrm{d}t$, où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 19
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ? Si oui, calculer leur valeur.

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,\mathrm{d}x$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+e^t)(1-e^{-t})}$ **6)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t$ **7)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(t^2+t+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ **8)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 20
Étudier la convergence des intégrales et l'intégrabilité des fonctions suivantes :

1) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \left(2i-\frac{1}{x^2}\right)e^{i(x^2)}\,\mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\sin(t^4)\,\mathrm{d}t$

Indication : *Pour le 1), calculer une primitive. Pour le 2), s'aider d'une intégration par partie.*

Exercice 21
Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que f est dérivable en 0, et que $f(0)=0$.

1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2) On suppose de plus que $f'(0)\neq 0$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exercice 22
Soit $x\in]0,+\infty[$. Soit $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\dfrac{1}{t(t+x)}$.

1) Nature et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Nature de la série $\displaystyle\sum\frac{1}{n(n+x)}$. On note $S(x)$ sa somme.

3) A l'aide d'un encadrement, montrer que $S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{\ln x}{x}$.

Exercice 23
Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ continues. On suppose de plus que $f \sim_b g$.

1) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$? Montrer que

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \sim_b \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention ! $\displaystyle\int_{[a,b[} f$ et $\displaystyle\int_{[a,b[} g$ sont des nombres, des réels bien concrets. Ils sont a priori différents. Il peuvent être égaux, plus grand, plus petit l'un que l'autre ... et c'est tout.

2) On suppose que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$? Montrer que

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \sim_b \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

<u>Indication</u> : *Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe x_1 tel que pour tout $x \geqslant x_1$,*

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 24 (Restes et sommes partielles)
On cherche à obtenir des équivalent des sommes partielles d'une série divergente ou des restes d'une série convergente, dans le cas des séries de Riemann.
On s'aidera d'une comparaison série / intégrale pour obtenir un encadrement.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$. Montrer que

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 25 (ENSAIT-Roubaix 2012/ petites mines 2011)
Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ on pose $g(x, t) = e^{-t^2}\cos(xt)$

1) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x, t)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'elle est paire.

2) Montrer que f est continue.

3) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'un intégrale généralisée.

4) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

5) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, trouver une expression de f sans intégrale.

Exercice 26
Pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ on pose $g(x, t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x, t)\,\mathrm{d}t$. De plus, soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

2) Mêmes questions pour h.

3) Vérifier que $f + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, que l'on déterminera.

4) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (à l'aide d'une majoration) et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 27 (Fonction Gamma)
Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma(1) = 1.$$

b) Montrer que

$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

c) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que Γ est continue sur son domaine de définition.

3) Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition, et exprimer sa dérivée à l'aide d'un intégrale. En déduire que Γ est convexe (c'est-à-dire que $\Gamma'' \geqslant 0$).

(La fonction Gamma vérifie bien des relations et des formules, que nous ne détaillons pas dans cet exercice).

Exercice 28 (Produit de convolution)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer que la formule

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

définit une fonction $f * g$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $f * g = g * f$ (on justifiera soigneusement).

3) On suppose de plus que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la fonction g' est bornée. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $(f * g)' = f * g'$.

Exercice 29 (Transformée de Fourier d'une fonction intégrable)

1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que la fonction $\widehat{f}$ ainsi définie est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^n$, à support compact (c'est-à-dire nulle hors d'un segment $[a, b]$). Déterminer $\widehat{f^{(n)}}(\xi)$ en fonction de ξ et de $\widehat{f}(\xi)$ (remarque : on dérive f *puis* on prend la transformée de Fourier).

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et supposons que la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$ soit aussi intégrable. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{f}(\xi) = -i\widehat{g}(\xi)$.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et déterminer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}\widehat{f}$ en fonction de $\widehat{g}_n$.

Exercice 30 (Ecricome ECS 2009)
Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

1) Domaine de définition, parité et valeur en $x = 0$ de f.

2) Branche infinie de $\mathscr{C}_f$:

a) Montrer que $\qquad \forall (x,t) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}_+ \quad xe^t \leqslant \sqrt{1 + x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$

b) En déduire que $\forall x > 0$, $x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$ puis la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Montrer que f est continue puis $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition. Donner son tableau de variations.

4) **a)** Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable $u = xe^t$, déterminer une nouvelle expression de f. Faire de même pour f'.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u$ et que la fonction $u \mapsto \dfrac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

d) En déduire un équivalent de f' puis de $f - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de 0.

Exercice 31
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(1-x^2t)}}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2) Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}_f$.

3) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$. <u>Indication</u> : *On pourra comparer* $\sqrt{1-x^2t}$ *et* $\sqrt{1-t}$.