Exercices : Algèbre bilinéaire

Exercice 1
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire.
Soit $(y_1, y_2) \in E^2$ tels que $\forall x \in E$ $< x, y_1 >=< x, y_2 >$. Montrer que $y_1 = y_2$.
Remarque : cette propriété est importante, en particulier lorsque $y_2 = 0$. Il faut savoir l'écrire en termes matriciels.

Exercice 2
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $< A, B >= \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$.

1) Montrer que $< A, B >= \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$ défini un produit scalaire sur E en explicitant ce produit scalaire en fonction des coefficients de A et B. En déduire une base orthonormée.

2) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

3) Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (les matrices symétriques) et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (les matrices antisymétriques) sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

Exercice 3
Soit I un intervalle fixé de $\mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des fonction continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que f^2 soit intégrable sur I.

1) Montrer que E est un espace vectoriel.

2) On admet que $< f, g >= \displaystyle\int_I fg$ est un produit scalaire. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 4
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, majorer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (Schmidt)
Orthonormaliser par Schmidt les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$: $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ et $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$

Exercice 6 (orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projection)
Soit $E = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique ; et $F = \mathrm{Vect}\,((1,2))$. (faire un dessin)

1) Donner l'équation de $F^\perp$, puis une base de $F^\perp$. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ de $E = F \oplus F^\perp$ compatible avec la somme directe.

2) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Donner la matrice de p_F dans $\mathscr{B}'$, puis dans $\mathscr{B}$.
Pour tout $x \in E$ donner l'expression de $p_F(x)$ en fonction de x et e'_1 ,sans passer par les matrices que l'on vient d'obtenir.

3) Distance $\mathrm{d}((1,1), F)$.

Exercice 7
Soit $E = \mathbb{R}^4$ euclidien canonique, $\mathscr{B}$ la base canonique.
Posons $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 3, 1, -1)$ et $F = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$.

1) **a)** Donner un système d'équations de $F^\perp$, puis une base orthonormée de $F^\perp$. Peut-on en déduire un système d'équations de F ?

b) En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_i)_i$ de $E = F \oplus F^\perp$ compatible avec la somme directe.

2) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Pour tout $x \in E$ donner l'expression de $p_F(x)$ en fonction de x et les e'_i, puis en déduire la matrice de p_F dans $\mathscr{B}$.

3) Distance $\mathrm{d}((1,0,0,1), F)$.

Exercice 8 (PT 2009 A)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien, et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E$ $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 9 (Polynômes de Hermite)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E. Orthogonaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) En déduire la projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $W : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, non identiquement nulle, telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ la fonction PW est intégrable sur I, alors on peut définir le produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_I PQW$ sur E. En orthonormalisant la base canonique, on obtient une famille de polynômes orthogonaux. Par exemple les polynômes de Legendre ($I = [-1, 1]$, $W(x) = 1$), de Tchebychev ($I = [-1, 1]$, $W(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$), de Hermite ($I = \mathbb{R}$, $W(x) = e^{-x^2}$), de Laguerre, etc...

Exercice 10
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire.
Soit f, g deux fonctions de E dans E telles que $\forall (x, y) \in E^2 \quad < x, f(y) >=< g(x), y >$.
Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 11 (De l'endomorphisme à la matrice)

1) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\pi/3$ et d'axe $\mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^3$ unitaire et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x) = a \wedge x+ < a, x > a$. Reconnaître f.

Exercice 12
Soit E euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice M dans une base orthonormée est symétrique et orthogonale. Qu'est-ce que f ?

Exercice 13
Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall i, j \quad |a_{ij}| \leqslant 1$ et $\displaystyle\left|\sum_{ij} a_{ij}\right| \leqslant n$.
<u>Indication</u> : *Pour la première inégalité, revenir à la définition d'un endomorphisme orthogonal.*

Exercice 14 (De la matrice à l'endomorphisme)
Montrer que les endomorphismes $f_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ associés aux matrices suivantes (dans la base canonique) sont orthogonaux.

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Décrire les éléments propres. Si c'est une rotation, déterminer l'axe et l'angle. Calculer M_3^{481}.

Exercice 15 (suite du 9)
Montrer que $u(P) = P'' - XP'$ est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 16 (PT 2008, B partie IV)
Soit E un espace euclidien, $a \in E$ unitaire, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = x + \alpha < x, a > a$.

1) Vérifier que f est un endomorphisme symétrique de E.

2) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ est également stable par f.

3) Montrer que a est un vecteur propre de f.

4) Montrer que 1 est une valeur propre de f. Quel est le sous-espace propre associé ?

5) Pour quelles valeurs de α f est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.

Exercice 17
Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable puis la diagonaliser dans une base orthonormée.

Exercice 18 (BCE 2013 S)
Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire est noté $< ., . >$, et la norme $\|.\|$.

1) Soit X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y de E dans la base $\mathscr{B}$. Rappeler l'expression de $< x, y >$ à l'aide de X et Y.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. On note f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est ${}^tA$.

a) Vérifier que l'on a $\forall (x, y) \in E^2$, $< f(x), y > = < x, f^*(y) >$.

b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2$, $< f(x), y > = < x, f^*(y) >$.

3) On suppose désormais que $f \in \mathscr{L}(E)$ possède au moins une valeur propre λ réelle, et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan E stable par f.

a) Montrer que λ est valeur propre de f^*.

b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ. Montrer que $(\text{Vect } u)^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.

Exercice 19

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tAA$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positives.

2) Réciproquement : soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$. Dans quel cas A est-elle inversible ?