Exercices : Euclidiens

Exercice 1
Montrer que les applications $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont des produits scalaires sur E.

1) $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Commencer par vérifier que $\varphi(P, Q)$ existe.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels 2 à 2 distincts.
$E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.

3) $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(A, B) \in E$, $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$. Expliciter ce produit scalaire en fonction des coefficients de A et B.

Exercice 2
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire.
Soit $(y_1, y_2) \in E^2$ tels que $\forall x \in E$ $< x, y_1 >=< x, y_2 >$. Montrer que $y_1 = y_2$.
Remarque : cette propriété est importante, en particulier lorsque $y_2 = 0$. Il faut savoir l'écrire en termes matriciels.

Exercice 3
Montrer que pour $0 < a < b$, on a $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. Indication : *Cauchy-Schwarz.*
(bonus : peut-on avoir égalité ?)

Exercice 4
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $< A, B >= \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$.

1) Déduire de l'écriture de $< A, B >$ une base orthonormée.

2) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

3) Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (les matrices symétriques) et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (les matrices antisymétriques) sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

Exercice 5
Soit I un intervalle fixé de $\mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des fonction continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que f^2 soit intégrable sur I.

1) Montrer que E est un espace vectoriel, puis que $< f, g >= \displaystyle\int_I fg$ est un produit scalaire.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 6
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, majorer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 (Schmidt)
Orthonormaliser par Schmidt les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$: $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ et $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$

Exercice 8 (orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projection)
Soit $E = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique ; et $F = \mathrm{Vect}\,((1,2))$. (faire un dessin)

1) Donner l'équation de $F^\perp$, puis une base de $F^\perp$. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e_1', e_2')$ de $E = F \oplus F^\perp$ compatible avec la somme directe.

2) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Donner la matrice de p_F dans $\mathscr{B}'$, puis dans $\mathscr{B}$.
Pour tout $x \in E$ donner l'expression de $p_F(x)$ en fonction de x et e_1' ,sans passer par les matrices que l'on vient d'obtenir.

3) Distance $\mathrm{d}((1,1), F)$.

Exercice 9
Soit $E = \mathbb{R}^4$ euclidien canonique, $\mathscr{B}$ la base canonique.
Posons $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (0, 3, 1, -1)$ et $F = \text{Vect}\,(v_1, v_2)$.

1) **a)** Donner un système d'équations de $F^\perp$, puis une base orthonormée de $F^\perp$. Peut-on en déduire un système d'équations de F ?

b) En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_i)_{1\leqslant i\leqslant 4}$ de $E = F \oplus F^\perp$ compatible avec la somme directe.

2) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Pour tout $x \in E$ donner l'expression de $p_F(x)$ en fonction de x et les e'_i, puis en déduire la matrice de p_F dans $\mathscr{B}$.

3) Distance $\mathrm{d}((1, 0, 0, 1), F)$.

Exercice 10
On considère l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable (i.e. la série $\sum |u_n|^2$ converge), muni de son produit scalaire canonique

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

On note F l'ensemble des suites réelles à support fini, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang (ce rang dépendant de la suite considérée).

1) Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{R})$, différent de $\ell^2(\mathbb{R})$.

3) Montrer que $F^\perp = \{0\}$

4) En déduire que $F^{\perp\perp} \neq F$

Exercice 11 (PT 2009 A)
Soit E un espace préhilbertien, et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Indication : *Penser à la preuve de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 12 (Polynômes de Legendre)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E. Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) En déduire la projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t$. On commencera par écrire le problème algébriquement.

4) Soit $(P_0, P_1, \dots)$ une base orthonormée de E de degré échelonné [1].
Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles et dans $[-1, 1]$.

Indication : *Si on note $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ les racines de P_n comptées avec multiplicité, et $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$, on pourra regarder $(Q|P_n)$.*

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $W : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, non identiquement nulle, telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ la fonction PW est intégrable sur I, alors on peut définir le produit scalaire $< P, Q >= \displaystyle\int_I PQW$ sur E. En orthonormalisant la base canonique, on obtient une famille de polynômes orthogonaux. Par exemple les polynômes de Legendre ($I = [-1, 1]$, $W(x) = 1$), de Tchebychev ($I = [-1, 1]$, $W(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$), de Hermite ($I = \mathbb{R}$, $W(x) = e^{-x^2}$), de Laguerre, etc...

Exercice 13
Sur le même modèle, déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi} (t - a\cos t - b\sin t)^2\,\mathrm{d}t$.

1. i.e. $\deg P_n = n$: par exemple la base obtenue par orthonormalisation de Schmidt à partir de la base canonique

Exercice 14
Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathscr{O}(E)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{id}_E)^\perp$.

2) En déduire que si $(f - \mathrm{id}_E)^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 15 (PT 2012 A)
On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté muni d'un repère orthonormé direct (i, j, k). On note $< u, v >$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$ des vecteurs u et v.

1) On considère f la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y = 0$ et g la réflexion par rapport au plan d'équation $y + z = 0$.

- **a)** Quelle est la nature de $f \circ g$? Préciser ses éléments caractéristiques.
- **b)** Donner la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique.
- **c)** Les endomorphismes f et g commutent-ils ?
- **d)** Déterminer les valeurs propres (complexes) de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

2) On considère les endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice respective dans la base canonique

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Décrire ces endomorphismes, en particulier leurs éléments caractéristiques.

3) Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall u \in \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(u) = u + \lambda < u, a > a$$

- **a)** Vérifier que φ est un endomorphisme.
- **b)** Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'application φ est-elle une isométrie ?
- **c)** Reconnaître alors φ.

Exercice 16
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire.
Soit f, g deux fonctions de E dans E telles que $\forall (x, y) \in E^2 \quad < x, f(y) >=< g(x), y >$.
Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 17 (OT 2012 Petites Mines)
Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall i, j \quad |a_{ij}| \leqslant 1$ et $\left|\sum_{ij} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Indication : *Pour la première inégalité, revenir à la définition d'un endomorphisme orthogonal. Pour la seconde, remarquer que* $< x, y >= {}^tXY$ *dans une base orthonormée.*

Exercice 18
Montrer que $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable plus la diagonaliser dans une base orthonormée.

Exercice 19

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tAA$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives. Indication : *Regarder* $\|AX\|^2$ *où* X *est un vecteur propre de* S.

2) Réciproquement : soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$. Dans quel cas A est-elle inversible ?

Exercice 20
Donner l'équation réduite, les éléments caractéristiques et représenter la courbe pour chacune des équations suivantes

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 10y + 4 = 0$ **2)** $x^2 + 6xy + y^2 + 4x = 0$ **3)** $3x^2 + 4xy + 6y^2 + 2\sqrt{5}x = 1$