Devoir de Mathématiques numéro 6

Exercice 1

Soient $p \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.
On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs A_0, A_1, ..., A_n, ... qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent dans le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au tournoi numéro k qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant le remporter avec une probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi.

Pour tout entier naturel n, on considère l'événement

E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issu du duel numéro n »

Partie 1 (Étude d'un cas particulier)

Dans cette partie, $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$,

$$P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2})$$

2) Justifier l'exister de quatre réels λ, μ, r_1 et r_2 tels que :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé.

3) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(E_n)$.

4) Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ? (on exprimera cet événement à l'aide des E_n).

Partie 2 (Cas général)

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1$$

1) Pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, on considère l'événement :

$A_k^{(n)}$: « à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires ».

Justifier l'égalité :

$$\forall n \geqslant N \qquad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k})$$

2) Établir que,

$$\forall n \geqslant N \qquad P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k})$$

3) Calculer $P(E_1), \ldots, P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}$$

4) Soit $n \geqslant N$. Démontrer

$$P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1} P(E_{n-N+1})$$

5) Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0, +\infty[$. On note désormais r_N cette solution. Justifier que

$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0$$

6) À l'aide de la relation obtenue à la question 2.2, établir que :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$$

7) Établir la convergence de $\sum_{n \geqslant 1} P(E_n)$ puis, à l'aide de la question 2.4, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

8) On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.

a) Soit $n \geqslant 2$. Justifier que les événements $(E_{n-1} \cap \overline{E_n})$ et $(X = n)$ sont égaux.

b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

Partie 3 (Calcul de $P(E_n)$)

Les hypothèses et définitions introduites à la partie 2 sont conservées. Les résultats de la question 2.5 pourront être utilisés librement (même si la preuve n'a pas été effectuée).

1) On considère le polynôme

$$R(X) = 1 - X + pq^{N-1} X^N$$

Montrer que :

$$(qX - 1)Q(X) = R(X) \qquad \text{et} \qquad XR'(X) - NR(X) = (N-1)X - N$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$Q(z) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z) = 0$$

Montrer que $R(z) = 0$ et $R'(z) = 0$. En déduire que $z \in [0, +\infty[$ puis obtenir une contradiction.

En déduire que Q ne possède que des racines simples, puis qu'il existe $N - 1$ complexes non nuls distincts $z_1, \ldots, z_{N-1}$ tels que :

$$Q(X) = (X - z_1) \ldots (X - z_{N-1})$$

2) On considère l'application linéaire :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}_{N-2}[X] & \to & \mathbb{C}^{N-1} \\ S & \mapsto & \left(S\left(\dfrac{1}{z_1}\right), \ldots, S\left(\dfrac{1}{z_{N-1}}\right)\right) \end{cases}$$

Où z_1, …, z_{N-1} sont les $N-1$ racines distinctes de Q.

a) Prouver que f est un isomorphisme.

b) Écrire sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et $\mathbb{C}^{N-1}$. Expliciter ${}^tA$.

c) En déduire que le système :

$$(S) : \begin{cases} x_1 & + \ldots + & x_{N-1} & = P(E_1) \\ \dfrac{x_1}{z_1} & + \ldots + & \dfrac{x_{N-1}}{z_{N-1}} & = P(E_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{x_1}{z_1^{N-2}} & + \ldots + & \dfrac{x_{N-1}}{z_{N-1}^{N-2}} & = P(E_{N-1}) \end{cases}$$

admet une unique solution $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})$.

d) Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1})$ l'unique solution du système (S) étudié à la question 3.2.c.
On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n = \frac{\alpha_1}{z_1^{N-2}} + \cdots + \frac{\alpha_{N-1}}{z_{N-1}^{N-2}} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1}$$

Montrer que

$$\forall n \geqslant N \qquad u_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}$$

En déduire que,

$$\forall n \geqslant 1 \qquad P(E_n) = u_n$$