Devoir de Mathématiques numéro 6

Correction

Exercice 1 (PT 2013 C)

1) (toujours faire un croquis de l'allure de la courbe)

La fonction h est impaire, donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(h) = 0}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin nt\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{t\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n(h) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}}$

2) Soit f définie sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et T-périodique ($T > 0$), et pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$S_N(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N}(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x))$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N(f)(x)$ existe et vaut $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, moyenne des limites à gauches et à droites de f en x.

3) Ici h est affine par morceaux et donc $\mathscr{C}^1$ par morceaux. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier $S_N(h)(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) = \widetilde{h}(x)}$$

où $\widetilde{h}(x) = h(x)$ pour tout $x \notin \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et

$$\widetilde{h}((2k+1)\pi) = \frac{\lim\limits_{x\to(2k+1)\pi^+} h(x) + \lim\limits_{x\to(2k+1)\pi^+} h(x)}{2} = 0$$

4) Pour tout $x \in [0,\pi[$, $\widetilde{h}(x) = h(x) = x$ donc d'après 3), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) = x$, puis

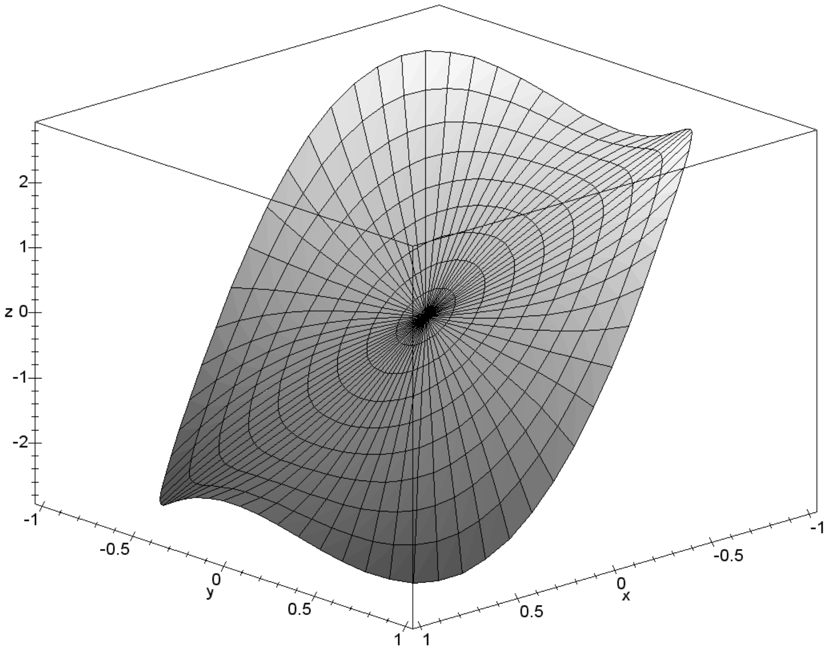
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2}}$$

5) En $x = \dfrac{\pi}{2}$, il vient,

$$\begin{array}{ll} \text{si } n = 2p, & \sin(nx) = \sin\left(2p\frac{\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0 \\ \text{si } n = 2p+1, & \sin(nx) = \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p\sin(\pi/2) = (-1)^p \end{array}$$

Donc la série de Fourier s'écrit $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^{2p+1-1}\frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$, d'où $\boxed{\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}}$

Exercice 2 (D'après E3A MP 2007)



1) **a)** La fonction f est polynomiale en x et y, elle est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) La fonction f est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ car $\mathscr{C}^\infty$, et D est fermé borné dans $\mathbb{R}^2$. Donc f est bornée et atteint ses bornes sur D :

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un maximum global } A \text{ et un minimum global } a \text{ sur } D\text{, qui sont atteint.}}$

2) Extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$.

a) $$\boxed{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & = & 3x_0^2 - 3(1 + y_0^2) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -6x_0 y_0 \end{array}}$$

b) Soit (x_0, y_0) tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, c'est-à-dire solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_0^2 - 3(1 + y_0^2) & = & 0 \\ -6x_0 y_0 & = & 0 \end{array} \right.$$

La seconde équation impose $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$. Dans le premier cas, la première équation s'écrit $-3(1 + y_0^2) = 0$, donc $1 + y_0^2 = 0$, ce qui est impossible. Dans le second cas, la première équation s'écrit $3x_0^2 - 3 = 0$, donc $x_0 = \pm 1$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Les solutions sont } (-1, 0) \text{ et } (1, 0).}$$

c) Ces points sont des points critiques de f. Posons

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = 6x_0 \quad , \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = -6y_0 \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = -6x_0$$

Il vient $rt - s^2 = -36(x_0^2 + y_0^2)$. Donc pour $(x_0, y_0) = (-1, 0)$ ou $(1, 0)$, $rt - s^2 = -36 < 0$.
Par conséquent, $\boxed{\text{Ces points ne sont pas des extrema locaux de } f.}$

d) La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On sait qu'alors, si elle présente un extremum local en un point, ce point est un point critique de f. Or on a vu que ses seuls points critiques sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, et que f n'y a pas d'extremum ; par suite $\boxed{f \text{ n'a pas d'extremum local sur } \mathbb{R}^2.}$

3) Extrema sur le disque unité D.

a) Si A est atteint en (x_0, y_0) appartenant au disque *ouvert* $\mathring{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, alors (x_0, y_0) serait un extrema local de f, ce qui est impossible d'après 1)d).

Par suite $\boxed{A \text{ est atteint en un point de } C = D - \mathring{D}.}$

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(\cos t, \sin t) = \cos t(\cos^2 t - 3 - 3(1 - \cos^2 t)) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$.
Étudions la fonction $\varphi : u \mapsto 2u(2u^2 - 3)$ sur $[-1, 1]$. On a $\varphi'(u) = 12u^2 - 6 = 6(2u^2 - 1)$, donc φ atteint son maximum en $u = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, qui vaut $\max\limits_{[-1,1]} \varphi = 2\sqrt{2}$.
Or $g(u, \sqrt{1 - u^2}) = g(u, -\sqrt{1 - u^2}) = \varphi(u)$.

En conclusion, $\boxed{\text{La fonction } g \text{ atteint son maximum } A = 2\sqrt{2} \text{ en } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$

c) On peut suivre la même démarche qu'aux questions précédentes, ou bien remarquer que $g(\cos(t + \pi), \sin(t + \pi)) = -g(\cos t, \sin t)$. Donc par symétrie,

$\boxed{\text{La valeur du minimum est } a = -A = -2\sqrt{2} \text{ et les point de } C \text{ sur lesquels } g \text{ atteint cette valeur sont } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$

Exercice 3 (PT 2012, B)

1) La droite Δ_1 passe par $A(0, 0, 1)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc pour paramétrage

$$\boxed{\Delta_1 : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & t + 1 \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}}$$

2) Le point M_1 a donc pour coordonnées $(a, a, a+1)$ et le point M_2 $(b, 0, 0)$. De même que précédemment,

$$\boxed{(M_1M_2) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & (a - b)t + b \\ y & = & at \\ z & = & (a + 1)t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}}$$

3) $M \in (M_1M_2) \cap \Delta_3$ si et seulement si M a pour coordonnées $((a - b)t + b, at, (a + 1)t)$ et vérifie $x_M + y_M = y_M + z_M = 0$ c'est-à-dire

$$(2a - b)t + b = 0 \qquad \text{et} \qquad (2a + 1)t + 1 = 0$$

Ce système a une solution seulement si $(2a - b) - 52a + 1)b = 0$, c'est-à-dire $a - b - ab = 0$.

Lorsque $b = 1$, le système s'écrit $\left\{ \begin{array}{lcl} (2a - 1)t + 1 & = & 0 \\ (2a + 1)t + 1 & = & 0 \end{array} \right.$ qui n'a pas de solutions.

Lorsque $b \neq= 1$, la condition sur a et b s'écrit $a = \frac{b}{1 - b}$

Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } (M_1M_2) \text{ et } \Delta_3 \text{ se rencontrent si et seulement si } a = \frac{b}{1 - b} \text{ et } b \neq 1}$

4) On suppose donc $b \neq 1$ et $a = \frac{b}{1 - b}$. Le système trouvé en 2) s'écrit : $\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & (\frac{b}{1 - b} - b)t + b \\ y & = & \frac{b}{1 - b}t \\ z & = & (\frac{b}{1 - b} + 1)t \end{array} \right.$.

Après remplacement de t par $t/(1 - b)$, ce système s'écrit

$$\boxed{(M_1M_2) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & tb^2 + b \\ y & = & tb \\ z & = & t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}}$$

5) Les droites Δ' qui coupent les droites Δ_1 et Δ_2 sont les droites $\Delta' = (M_1M_2)$ précédentes. Ces droites (M_1M_2) coupent aussi Δ_3 si et seulement si $b \neq 1$ et $a = b/(1-b)$, et la droite Δ' a alors pour équation paramétrique :

$$\Delta' = (M_1M_2) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & tb^2 + b \\ y & = & tb \\ z & = & t \end{array} \right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

Vérifions qu'elle est incluse dans la quadrique :

$$xz - y^2 - y = (tb^2 + b)t - (tb)^2 - tb = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } \Delta' \text{ qui rencontrent } \Delta_1,\ \Delta_2 \text{ et } \Delta_3 \text{ sont incluses dans la quadrique } Q.}$

6) *On peut faire la méthode du cours : réduire, trouver la matrice de passage, changer de base dans la partie linéaire, rentrer les parties linéaires en mettant sous forme canonique. Vous y êtes encore après demain... Ou bien la méthode suivante, en suivant l'énoncé.*

Plaçons-nous dans un repère de centre $\Omega(0, -\dfrac{1}{2}, 0)$: $\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x \\ y_1 & = & y + \dfrac{1}{2} \\ z_1 & = & z \end{array} \right.$

Dans ce nouveau repère, l'équation de la quadrique s'écrit :

$$x_1 z_1 - \Big(y_1 - \frac{1}{2}\Big)\Big(y_1 + \frac{1}{2}\Big) = x_1 z_1 - y_1^2 + \frac{1}{4} = 0$$

Là aussi, on peut procéder comme dans le cours, ou comme dans votre cours de sup lorsque vous rencontriez la conique $xy = K$

La matrice associée à la forme quadratique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1/2)(\lambda + 1/2)$.

Elle est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée. Dans une base orthonormée de vecteurs propres, l'équation de Q est donc

$$\frac{1}{2}x_2^2 - y_2^2 - \frac{1}{2}z_2^2 = -\frac{1}{4}$$

c'est-à-dire, en multipliant par -4,

$$-2x_2^2 + 4y_2^2 + 2z_2^2 = 1$$

$\boxed{\text{La quadrique } Q \text{ est un hyperboloïde à une nappe, de centre } \Omega \text{ \textit{(et d'axe} } \operatorname{Ker}(A - 1/2 I_3)\text{\textit{)}}.}$

7) Vérifions que les droite Δ_4 et Δ_5 ne sont ni parallèles ni sécantes :

Δ_4 a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et Δ_5 a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \star \\ \star \end{pmatrix} \neq 0$ donc les deux droites ne sont pas parallèles.

De plus $M \in \Delta_4 \cap \Delta_5$ si et seulement si $x = y = z$ et $\left\{ \begin{array}{r} x - x = 2 \\ x - 2x = 1 \end{array} \right.$, ce qui est impossible : $\Delta_4 \cap \Delta_5 = \emptyset$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } \Delta_4 \text{ et } \Delta_5 \text{ ne sont pas coplanaires.}}$

8) Le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs des deux droites, c'est donc un vecteur directeur de la perpendiculaire commune $\mathscr{D}$.

On cherche deux plans (qui nous donneront les deux équations cartésiennes) contenant la droite $\mathscr{D}$.

Ces plans, par exemple, contiennent Δ_i et la direction $\overrightarrow{u}$ de la droite $\mathscr{D}$ (notons les $\mathscr{P}_i$).
Ainsi $\mathscr{P}_4 \cap \mathscr{P}_5$ contiendra un point de Δ_4 et un point de Δ_5 (car Δ_4 et Δ_5 non parallèles), et contiendra la direction $\overrightarrow{u}$: ce sera la droite $\mathscr{D}$ cherchée.
Équation de $\mathscr{P}_4$: une équation cartésienne sera de la forme $a(x-z-2)+b(y-2z-1)=0$, c'est-à-dire

$$ax + by - (a+2b)z = 2a + b$$

avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
$\mathscr{P}_4$ contient la direction $\overrightarrow{u}$ si et seulement si un vecteur normal $\overrightarrow{n}_{\mathscr{P}_4}$ à $\mathscr{P}_4$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$, i.e.

$$\overrightarrow{n}_{\mathscr{P}_4}.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -(a+2b) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = a + a + 2b = 0$$

Choisissons par exemple $a = 1$ et $b = -1$. L'équation précédente de $\mathscr{P}_4$ devient alors

$$\mathscr{P}_4 : \qquad x - y + z = 1$$

De même pour $\mathscr{P}_5$: il aura pour équation $ax+by-(a+b)z = 0$, et $\overrightarrow{n}_{\mathscr{P}_5}.\overrightarrow{u} = 0$ nous donne $2a+b = 0$, par exemple $a = 1$ et $b = -2$. Finalement

$$\mathscr{P}_5 : \qquad x - 2y + z = 0$$

En conclusion, un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune $\mathscr{D}$ aux droites Δ_4 et Δ_5 est

$$\boxed{\mathscr{D} : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}}$$

9) *On sait que l'on va obtenir un hyperboloïde de révolution à une nappe, d'axe Δ_5.*

a) Un cercle dont le centre est sur Δ_5 peut se voir comme l'intersection d'une sphère de centre un point (pas forcément le même) de Δ_5 et d'un plan perpendiculaire à Δ_5.
Comme Δ_5 passe par l'origine, on peut regarder les sphères centrées en l'origine (d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$), et les plans auront pour équation $x + y + z = d$.
De plus ces cercles doivent croiser Δ_4 : il doit y avoir au moins une solution au système :

$$M(x,y,z) \in S \cap \Delta_4 \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 & \text{(sphère)} \\ x + y + z = d & \text{(plan perpendiculaire à } \Delta_5\text{)} \\ x - y = 0 & (M \in \Delta_4) \\ x - z = 0 & (M \in \Delta_4) \end{cases}$$

Nous allons en déduire une condition liant R et d.

b) Cf le cours sur les surfaces pour une justification de ce point.

c) *Le changement de centre permet de se débarrasser de la partie linéaire. On sait que la partie quadratique ne changera pas. Donc en fait, en développant, il suffit de calculer les termes constants, qui seuls nous intéressent.*