Devoir de Mathématiques numéro 6

Exercice 1

On considère la fonction h impaire, 2π-périodique, dont la restriction à $[0, \pi[$ est donnée par :

$$h(x) = x$$

1) Donner les coefficients de Fourier, notés $a_n(h)$ $(n \geqslant 0)$ et $b_n(h)$ $(n \geqslant 1)$, de la fonction h.

2) Rappeler le théorème de Dirichlet.

3) En déduire la convergence de la série de Fourier de h, et son expression, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Montrer que, pour tout réel x de $[0, \pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{x}{2}$$

5) En déduire

$$\pi = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.
Dans l'exercice, on considère le disque unité D et le cercle unité C :

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\} \\ C &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \end{aligned}$$

1) **a)** Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

b) Justifier l'existence, pour la fonction f, d'un maximum global A et d'un minimum global a sur D.

2) On se propose d'étudier les éventuels extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

a) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ de f au point (x_0, y_0).

b) Déterminer les points (x_0, y_0) tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

c) Ces points sont-ils des extrema locaux de f ? Justifier votre réponse, en précisant au besoin si ce sont des maxima ou des minima.

d) Quels sont les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$? On justifiera avec soin.

3) Désormais, soit g la fonction définie sur le disque unité D par $g(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

a) On rappelle que A est le maximum de g sur D. Montrer que A ne peut être atteint que sur le cercle C.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(\cos t, \sin t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$. En déduire la valeur de A et les point de C sur lesquels g atteint cette valeur.

c) Déterminer la valeur du minimum a et les point de C sur lesquels g atteint cette valeur.

Exercice 3

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points $A(0,0,1)$ et $B(1,1,2)$. On désigne par Δ_1 la droite (AB) et

$$\Delta_2 : y = z = 0 \qquad \Delta_3 : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = -1 \end{cases} \qquad \Delta_4 : \begin{cases} x - z = 2 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \Delta_5 : x = y = z$$

1) Donner une représentation paramétrique de Δ_1.

2) On considère le point M_1 de Δ_1 d'abscisse a et le point M_2 de Δ_2 d'abscisse b.
Donner une représentation paramétrique de la droite (M_1M_2).

3) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur a et b la droite (M_1M_2) a-t-elle une intersection non vide avec Δ_3 ?

4) On suppose dans cette question que la droite (M_1M_2) a une intersection non vide avec Δ_3. Donner une représentation paramétrique de (M_1M_2), on veillera à ce que le paramètre a n'apparaisse plus.

5) Soit une droite Δ' qui rencontre les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 ; montrer qu'elle est incluse dans la quadrique $\mathscr{Q}$ d'équation $xz = y(y+1)$.

6) Déterminer la nature de cette quadrique dont le centre a pour coordonnées $(0, -\frac{1}{2}, 0)$.

7) Vérifier que les droites Δ_4 et Δ_5 ne sont pas coplanaires.

8) Donner un système d'équations cartésiennes de la perpendiculaire commune aux droites Δ_4 et Δ_5.

9) (5/2) On désigne par S la surface de révolution engendrée par la rotation de la droite Δ_4 autour de la droite Δ_5.

- **a)** Donner une équation de la surface S. On écrira cette équation sous la forme $\varphi(x,y,z) = 0$.
- **b)** Les coordonnées $(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ du centre Ω de cette surface sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial d}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial d}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial d}{\partial z}(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

  Déterminer les coordonnées de Ω.
- **c)** Donner une équation réduite de la surface S dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. En déduire la nature de S.

(pour les 3/2 : réviser avec la correction lorsqu'on aura fini le chapitre surfaces).