Devoir de Mathématiques numéro 6

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2007)

1) La fonction f est paire donc $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{sh}\,(\alpha t)}{\alpha}\right]_0^\pi = \frac{\mathrm{sh}\,(\alpha\pi)}{\alpha\pi}$$

Pour $n \geqslant 1$, comme $\cos(a) = \mathrm{Re}\,(e^{ia})$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,\mathrm{Re}\,(e^{int})\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\,\left(\int_0^\pi \frac{e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}}{2}e^{int}\,\mathrm{d}t\right)$$

Or $\displaystyle\int_0^\pi e^{\alpha t}e^{int}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(\alpha+in)t}}{\alpha+in}\right]_0^\pi = \frac{e^{\alpha\pi}e^{in\pi}-1}{\alpha+in} = \frac{(-1)^n e^{\alpha\pi}-1}{\alpha+in}$ (Car $\alpha \neq 0$).

Et de même, $\displaystyle\int_0^\pi e^{-\alpha t}e^{int}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n e^{-\alpha\pi}-1}{-\alpha+in}$. Donc, par linéarité,

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\,\left(\frac{(-1)^n e^{\alpha\pi}-1}{\alpha+in} + \frac{(-1)^n e^{-\alpha\pi}-1}{-\alpha+in}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n\alpha\,(-e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi})}{-\alpha^2-n^2} = \frac{2\alpha\,\mathrm{sh}\,(\alpha\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}$$

La série de Fourier de f est

$$\boxed{S_N(f)(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{N}\frac{2\alpha\,\mathrm{sh}\,(\alpha\pi)}{\pi}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}\cos(nx)}$$

2) La fonction f est 2π-périodique, $\mathscr{C}^1$ par morceaux et continue, donc d'après le théorème de Dirichlet sa série de Fourier converge vers f :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{\mathrm{sh}\,(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{2\alpha\,\mathrm{sh}\,(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2+n^2}\cos(nx)$$

En particulier pour $x = 0$, $\cos(nx) = 1$ et $f(0) = 1$ donc $\boxed{\Sigma_2 = \dfrac{\pi}{2\alpha\,\mathrm{sh}\,(\alpha\pi)} - \dfrac{1}{2\alpha^2}}$

Et pour $x = \pi$, $\cos(nx) = (-1)^n$ et $f(\pi) = \mathrm{ch}\,(\alpha\pi)$ donc $\boxed{\Sigma_1 = \dfrac{\pi\,\mathrm{ch}\,(\alpha\pi)}{2\alpha\,\mathrm{sh}\,(\alpha\pi)} - \dfrac{1}{2\alpha^2}}$

Exercice 2 (PT 2008 C)

1) Le changement de variable polaire nous donne :

$$I_R = \int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = \boxed{\pi\left(1-e^{-R^2}\right)}$$

2) Comme $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}\geqslant 0$ et $D_R\subset C_R\subset D_{\sqrt{2}R}$, il vient

$$I_R\leqslant J_R\leqslant I_{\sqrt{2}R}$$

3) D'après le calcul effectué au 1), $\lim\limits_{R\to+\infty} I_R=\pi=\lim\limits_{R\to+\infty} I_{\sqrt{2}R}=\pi$. Par encadrement, $\lim\limits_{R\to+\infty} J_R=\pi$.
De plus, le théorème de Fubini nous dit

$$J_R=\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y$$

Or $e^{-(x^2+y^2)}=e^{-x^2}e^{-y^2}$, donc par linéarité de l'intégrale et parité de la fonction,

$$J_R=\left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-R}^{R} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)=\left(2\int_{0}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{J_R}$. En passant à la limite l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Maple pour le tracé du domaine :

```
> restart :
> with(plots) :
> D1 :=plot([cos(t),sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained,color=red) :
> D2 :=plot([sqrt(2)*cos(t),sqrt(2)*sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained,color=red) :
> C :=plot([[-1,1],[-1,-1],[1,-1],[1,1],[-1,1]],color=blue) :
> Ox :=plot([t,0,t=-1.3*sqrt(2)..1.3*sqrt(2)],color=black) :
> Oy :=plot([0,t,t=-1.3*sqrt(2)..1.3*sqrt(2)],color=black) :
> display({D1,D2,C,Ox,Oy}) ;
```

Exercice 3 (PT 2010 B)

1) • Nature de Q_1. La matrice de la forme quadratique associée est $A_1=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée :

$$\exists P\in\mathscr{O}(3)/\qquad A_1=PD_1P^{-1}$$

Soit P qui convienne. Déterminons D_1 en calculant le polynôme caractéristique :

$$\chi_1(\lambda)=\begin{vmatrix}2-\lambda&0&1\\0&2-\lambda&-1\\1&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda)-1)-(2-\lambda)=(2-\lambda)(2-3\lambda+\lambda^2-2)=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)$$

Donc dans la nouvelle base (orthonormée) définie par P la quadrique aura pour équation

$$2y_1^2+3z_1^2=1$$

Conclusion : $\boxed{Q_1 \text{ est un cylindre elliptique d'axe } E_0=\mathrm{Ker}\,(A_1).}$

• Nature de Q_2. La matrice de la forme quadratique associée est $A_2=\begin{pmatrix}5&-1&1\\-1&1&-3\\1&-3&1\end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée :

$$\exists P\in\mathscr{O}(3)/\qquad A_2=PD_2P^{-1}$$

Soit P qui convienne. Déterminons D_2 en calculant le polynôme caractéristique :

$$\chi_2(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -3 \\ 1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)$$

Donc dans la nouvelle base (orthonormée) définie par P la quadrique aura pour équation

$$3x_1^2 + 6y_1^2 - 2z_1^2 = 1$$

Conclusion : $\boxed{Q_2 \text{ est un hyperboloïde à une nappe d'axe } E_{-2} = \mathrm{Ker}\,(A_2 + 2I_3).}$

2) Nature de Q_3. La matrice de la forme quadratique associée est $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée :

$$\exists P \in \mathscr{O}(3) / \qquad A_3 = PD_3P^{-1}$$

Maple nous donne directement D_3 et P :

$$D_3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas unicité de P. Il faut vérifier que les vecteurs sont bien orthogonaux (dans E_3) et normés (tous).

Dans le nouveau repère (O, e_1, e_2, e_3) les coordonnées vérifient $X = PX_1$ donc la partie linéaire s'écrit (merci maple) :

$$-4x + 5y + 4z = \frac{7}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{14}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{17}{\sqrt{30}}z_1$$

Donc la quadrique aura pour équation $9x_1^2 + 3y_1^2 + 3z_1^2 + \frac{7}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{14}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{17}{\sqrt{30}}z_1 + 4 = 0$. Or

$$\begin{aligned} & 9x_1^2 + 3y_1^2 + 3z_1^2 + \frac{7}{\sqrt{6}}x_1 - \frac{14}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{17}{\sqrt{30}} + 4 \\ = \;& 9x_1^2 + 9.2.\frac{7}{18\sqrt{6}}x_1 + 9.\Big(\frac{7}{18\sqrt{6}}\Big)^2 - \Big(\frac{7}{6\sqrt{6}}\Big)^2 \\ & +3y_1^2 - 3.2.\frac{7}{3\sqrt{5}}y_1 + 3.\Big(\frac{7}{3\sqrt{5}}\Big)^2 - \frac{49}{15} \\ & +3z_1^2 + 3.2.\frac{17}{6\sqrt{30}}z_1 + 3.\Big(\frac{17}{6\sqrt{30}}\Big)^2 - \frac{17^2}{360} + 4 \\ = \;& 9\Big(x_1 + \frac{7}{18\sqrt{6}}\Big)^2 + 3\Big(y_1 - \frac{7}{3\sqrt{5}}\Big)^2 + 3\Big(z_1 + \frac{17}{6\sqrt{30}}\Big)^2 - \frac{49}{6^3} - \frac{49}{15} - \frac{17^2}{360} + 4 \end{aligned}$$

Donc en choisissant pour nouvelle origine du repère le point I de coordonnées

$$\Big(-\frac{7}{18\sqrt{6}}, \frac{7}{3\sqrt{5}}, -\frac{17}{6\sqrt{30}}\Big)_{(e_1,e_2,e_3)} = \Big(\frac{11}{27}, -\frac{26}{27}, -\frac{29}{54}\Big)_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}$$

(merci maple), comme $-\frac{49}{6^3} - \frac{49}{15} - \frac{17^2}{360} + 4 = -\frac{8}{27}$, l'équation de la quadrique sera

$$9x_2^2 + 3y_2^2 + 3z_2^2 = \frac{8}{27}$$

Conclusion : $\boxed{Q_3 \text{ est un ellipsoïde de centre } I\Big(\frac{11}{27}, -\frac{26}{27}, -\frac{29}{54}\Big).}$

3) Le volume de la partie de $\mathbb{R}^3$ contenue dans l'ellipsoïde Q est donné par la formule $V = abcV(B)$ (où B est la boule de rayon 1). La formule s'obtient en faisant le changement de variable $x = ax_1$, $y = by_1$ et $z = cz_1$ dans l'intégrale triple.
Ici $a = \sqrt{\dfrac{2^3}{3^5}}$ et $b = c = \sqrt{\dfrac{2^3}{3^4}}$, et $V(B) = \dfrac{4}{3}\pi$ donc

$$\boxed{V(Q) = \frac{4}{3}\pi\frac{2^4\sqrt{2}}{3^6\sqrt{3}}}$$

4) Un vecteur normal est donnée par le gradient : $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 18x_0 \\ 6y_0 \\ 6z_0 \end{pmatrix}$ qui n'est jamais nul puisque $(0,0,0) \notin Q_3$.

Donc

$$P(X,Y,Z) \in T_{Q_3,M} \iff \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{n} = 0 \iff (x - x_0).3x_0 + (y - y_0).y_0 + (z - z_0).z_0^2 = 0$$

Après simplification $(3x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = \dfrac{8}{81})$, $\boxed{\text{Une équation du plan tangent en } M \text{ est } 3x_0x + y_0y + z_0z - \dfrac{8}{81} = 0}$

5) Une équation paramétrique de la normale à Q au point $M(x_0, y_0, z_0)$ est donnée par $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + t\overrightarrow{n}$:

$$\boxed{\Delta_M : \begin{cases} x = x_0 + 3x_0t \\ y = y_0 + y_0t \\ z = y_0 + z_0t \end{cases}}$$

a) Dans le plan $z = 0$, la courbe a pour équation $9x^2 + 3y^2 = \dfrac{8}{27}$, et sous forme canonique

$$\frac{x^2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)^2} = 1$$

C'est une ellipse de centre I, le grand axe est porté par (I, e_2), de demi-grand axe égal à $\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$, le petit axe est porté par (I, e_1), de demi-petit axe égal à $\dfrac{2\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$.

b) Le point S n'est pas dans le plan contenant $\mathscr{E}_0$, car $r \neq 0$.

$$\boxed{M \in C_S \iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \exists E \in \mathscr{E}_0 \qquad \overrightarrow{SM} = \lambda\overrightarrow{SE}}$$

Ce qui peut aussi s'exprimer ainsi : $M = S$ ou il existe $\mu \in \mathbb{R}$ $(= 1/\lambda)$ tel que $S + \mu\overrightarrow{SM} \in \mathscr{E}_0$.

c) Comme $\mathscr{E}_0$ a pour équations [1] $\begin{cases} z &= 0 \\ 9x^2 + 3y^2 &= \dfrac{8}{27} \end{cases}$, et $S + \mu\overrightarrow{SM}$ a pour coordonnées $(p + \mu(x - p)q + \mu(y - q)r + \mu(z - r))$, la condition ci-dessus s'écrit

$$M \in C_S \iff \exists \mu \in \mathbb{R}^* \begin{cases} r + \mu(z - r) &= 0 \\ 9(p + \mu(x - p))^2 + 3(q + \mu(y - q)^2 &= \dfrac{8}{27} \end{cases}$$

Comme $r \neq 0$, la première équation nous donne $z \neq r$ et donc on peut poser $\mu = -\dfrac{r}{z - r}$.
En remplaçant dans la deuxième équation, on trouve

$$9(p - \frac{r}{z - r}(x - p))^2 + 3(q - \frac{r}{z - r}(y - q)^2 = \frac{8}{27}$$

1. courbe dans $\mathbb{R}^3$: deux équations.

En multipliant par $(z-r)$, il vient finalement

$$\boxed{\frac{243}{8}(xr-zp)^2+\frac{81}{8}(yr-zq)^2=(r-z)^2}$$

A priori en multipliant par $(z-r)$ on a rajouté la solution $z=r$, et il manquait le sommet S. Or dans cette dernière équation, $z=r$ $(\neq 0)$ correspond à $x=p$ et $y=q$, c'est-à-dire le sommet !

d) On trouve $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ \frac{243}{8}p^2z^2+\frac{81}{8}(ry-qz)^2 & = & (r-z)^2 \end{array}\right.$

e) En développant la seconde équation, on trouve

$$\left(\frac{243}{8}p^2+\frac{81}{8}q^2-1\right)z^2+\frac{81}{8}r^2y^2-\frac{81}{4}rqyz+2rz=r^2$$

Dans l'équation d'un cercle, il n'y pas de terme en yz, et les coefficients en z^2 et y^2 sont égaux :

$$q=0 \qquad \text{et} \qquad \frac{243}{8}p^2-1=\frac{81}{8}r^2$$

Il faut aussi vérifier que l'ensemble n'est pas vide, ce qui est le cas car le terme constant est $> r^2$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{H} \text{ est l'hyperbole d'équation}^2 : \frac{243}{8}p^2-\frac{81}{8}r^2=1 \text{ privé des sommets } r=0.}$