Devoir de Mathématiques numéro 6

Exercice 1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, et f, la fonction 2π-périodique donnée par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \qquad f(x) = \operatorname{ch}(\alpha x).$$

1) Développer la fonction f en série de Fourier.

2) En déduire la valeur des sommes suivantes

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 + n^2}, \qquad \text{et} \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2}.$$

Exercice 2

Pour tout $R > 0$ on pose

$$\begin{array}{lcllcl} I_R & = & \displaystyle\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \text{où} \quad D_R & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\} \\ J_R & = & \displaystyle\iint_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \text{où} \quad C_R & = & [-R, R] \times [-R, R] \end{array}$$

1) Calculer I_R en fonction de R.

2) Comparer I_R, J_R et $I_{R\sqrt{2}}$. <u>Indication</u> : *On pourra faire un dessin de D_R, C_R et $D_{R\sqrt{2}}$.*

3) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.
(<u>Indication</u> : *Calculer J_R en fonction de* $\displaystyle\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.)

Exercice 3

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, on considère les quadriques Q_1, Q_2 et Q_3 d'équations respectives

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2xz - 1 = 0 \quad , \quad 5x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 6yz + 2xz - 1 = 0$$
$$7x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy - 2yz - 4xz - 4x + 5y + 4z + 4 = 0$$

1) Déterminer la nature des quadriques Q_1 et Q_2.

2) Déterminer la nature de la quadrique Q_3. On donnera son équation réduite dans un repère (I, e_1, e_2, e_3) que l'on précisera. *N'hésitez pas à aller utiliser Maple en D03 ! !*

On se place jusqu'à la fin de cette partie dans le repère (I, e_1, e_2, e_3). On considère l'ellipsoïde Q d'équation :

$$9x^2 + 3y^2 + 3z^2 - \frac{8}{27} = 0$$

3) Déterminer le volume de l'ellipsoïde Q.

4) Donner une équation cartésienne du plan tangent à l'ellipsoïde au point $M(x_0, y_0, z_0) \in Q$.

5) Donner des équations de la normale Δ_M à l'ellipsoïde au point $M(x_0, y_0, z_0) \in Q$.

  a) Déterminer la nature de la courbe $\mathscr{E}_0$, intersection de l'ellipsoïde Q et du plan d'équation $z = 0$.

b) On désigne par C_S un cône de sommet $S(p, q, r)$ passant par $\mathscr{E}_0$; p, q et r désignant trois réels avec $r \neq 0$.

Rappeler une condition nécessaire et suffisante, exprimée vectoriellement, pour qu'un point M appartienne au cône C_S.

c) En déduire que le point $M(x, y, z)$ appartient au cône C_S si et seulement si :

$$\frac{243}{8}(xr - zp)^2 + \frac{81}{8}(yr - zq)^2 = (r - z)^2$$

d) Déterminer les équations de l'intersection entre le cône C_S et le plan de coordonnées d'équation $x = 0$.

e) En déduire les équations et la nature du lieu $\mathcal{H}$ des sommets des cônes contenant la courbe $\mathscr{E}_0$ et coupant le plan d'équation $x = 0$ suivant un cercle.