Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}^3$ canonique et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in E$.

Donner la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe $\operatorname{Vect}(e_1)$, orienté par e_1, et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 2

Tracer la conique d'équation $x^2 + 6xy + 9y^2 - 4x + 8y - 2 = 0$. On placera le ou les axes, et les tangentes aux points remarquables.

Exercice 3

Nous noterons $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Dans tout le problème, nous identifierons un vecteur de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}$.
Pour une matrice A de taille $m \times n$ quelconque, $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on désigne par A^T sa transposée.
On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et on rappelle que si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, leur produit scalaire s'écrit matriciellement $\langle u, v \rangle = u^T v$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Partie 1

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Pourquoi peut-on trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres de A ?

2) Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres.

3) La matrice A est-elle inversible ?

4) Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}$. Exprimer ses coordonnées (x', y', z') dans la base $\mathcal{B}'$.

5) Calculer $\langle Au, u \rangle$ en fonction de (x, y, z), puis en fonction de (x', y', z').

6) Soit λ la plus petite valeur propre de A. Déduire de ce qui précède que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\langle Au, u \rangle \geqslant \lambda \|u\|^2$.

7) Pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$, on pose $(u, v)_A = \langle Au, v \rangle$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Partie 2

On considère toujours la matrice A de la partie précédente et on fixe $b \in \mathbb{R}^3$. Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, on pose

$$J_b(u) = \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle - \langle u, b \rangle.$$

1) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction J_b ? Que vaut $J_b(0)$?

2) Calculer le gradient de la fonction J_b, puis sa matrice Hessienne.

3) En utilisant le résultat de la question 6 de la partie I, montrer que

$$J_b(u) \geqslant \frac{1}{2}\lambda \|u\|^2 - \|b\| \|u\|$$

où λ désigne la plus petite valeur propre de A.

4) En déduire que la fonction J_b est minorée et non majorée (on pourra étudier la fonction qui, à tout réel t, associe $\frac{\lambda}{2}t^2 - \alpha t$, pour une valeur de α bien choisie).

5) Montrer que : $\inf_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) \leqslant 0$.

6) Montrer que, si $\|u\| > \frac{2\|b\|}{\lambda}$, alors : $J_b(u) \geqslant 0$.

7) En déduire que : $\inf_{u\in\mathbb{R}^3} J_b(u) = \inf_{u\in\overline{B}(0,r)} J_b(u)$, où $\overline{B}(0,r)$ désigne la boule fermée de centre l'origine et de rayon $r = \frac{2\|b\|}{\lambda}$.

8) Montrer que la fonction J_b admet un minimum global sur $\mathbb{R}^3$.

9) Montrer que cette fonction atteint son minimum global au point $u = A^{-1}b$.

Partie 3

Soit A une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, symétrique, et dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Deux vecteurs non nuls u et v de $\mathbb{R}^n$ sont dits A-conjugués si $\langle Au, v\rangle = 0$.

1) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (comptées avec leur ordre de multiplicité) de la matrice A, rangées dans l'ordre croissant : $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

- **a)** Justifier l'existence d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ telle que, pour tout $i \leqslant n$, $Ae_i = \lambda_i e_i$.
- **b)** Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la décomposition dans la base précédente s'écrit

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

  Exprimer en fonction des α_i les quantités $\|u\|^2$ et $\langle Au, u\rangle$.
- **c)** Montrer que pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^n$, $\langle Au, u\rangle \geqslant \lambda_1 \|u\|^2$.
- **d)** En déduire que pour tout vecteur u non nul, on a $\langle Au, u\rangle \neq 0$.

2) Soit $(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1})$ une famille de vecteurs non nuls A-conjugués deux à deux. Montrer que cette famille forme une base de $\mathbb{R}^n$.

3) Rappeler (sans justification) l'expression de $(\alpha M + \beta N)^T$et $(MN)^T$ en fonction de M^T et N^T, où M, N sont des matrices de taille quelconque (mais telles que les opérations sont bien définies) et α, β sont des nombres réels.

4) Si v est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ (que l'on identifie avec une matrice colonne), préciser la taille des matrices $v^T v$ et $v\,v^T$ (on identifiera les matrices carrées de taille 1 et les nombres réels).

5) Montrer que pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^n$ et toute matrice carrée B d'ordre n, on a $\langle Bu, v\rangle = \left\langle u, B^T v\right\rangle$.

6) On définit pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ les matrices suivantes :

$$C_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{v_i\, v_i^T}{\langle Av_i, v_i\rangle} \quad , \quad D_k = I_n - C_k A$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

- **a)** Montrer que les matrices C_k sont symétriques pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

b) Montrer que, pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^n$, on a, pour $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$C_k A w = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\langle Av_i, w\rangle}{\langle Av_i, v_i\rangle} v_i.$$

c) En déduire que pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$, on a : $C_k A v_j = v_j$. (On rappelle que les v_i sont A-conjugués 2 à 2).

d) En déduire que pour $0 \leqslant j \leqslant k-1 \leqslant n$: $D_k v_j = 0$ et $D_k^T A v_j = 0$.

e) On a donc, pour tout $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $D_n v_j = 0$. Pourquoi peut-on en déduire que $D_n = 0$? Que vaut alors C_n ?