Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1

1) Soit $t \in]0, 2\pi[$,

$$\overrightarrow{M(t)M(2t)} = \begin{pmatrix} \cos 2t - \cos t \\ \sin 2t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin(3t/2)\sin(t/2) \\ 2\cos(3t/2)\sin(t/2) \end{pmatrix} = 2\sin\frac{t}{2}\begin{pmatrix} -\sin(3t/2) \\ \cos(3t/2) \end{pmatrix}$$

Choisissons par exemple $\boxed{\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} -\sin(3t/2) \\ \cos(3t/2) \end{pmatrix}}$

2) $\overrightarrow{u}'(t) = -\dfrac{3}{2}\begin{pmatrix} \cos(3t/2) \\ \sin(3t/2) \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u}$, vu qu'ils sont orthogonaux.

D'après le théorème sur les enveloppes, il existe $\lambda :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que Γ ait pour équation paramétrique :

$$f(t) = \overrightarrow{OM}(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t) \qquad \text{pour tout } t \in]0, 2\pi[$$

et $f'(t)$ et $\overrightarrow{u}(t)$ soient colinéaires. Soit un tel λ. Alors $f'(t)$ et $\overrightarrow{u}(t)$ sont colinéaire s'écrit

$$\det(f'(t), \overrightarrow{u}(t)) = \det(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda'(t)\overrightarrow{u}(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}'(t), \overrightarrow{u}(t)) = \det(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}, \overrightarrow{u}(t)) + \lambda(t)\det(\overrightarrow{u}'(t), \overrightarrow{u}(t))$$

Or $\begin{cases} \det(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}, \overrightarrow{u}(t)) = \begin{vmatrix} -\sin t & -\sin(3t/2) \\ \cos t & \cos(3t/2) \end{vmatrix} = \sin(t/2) \\ \det(\overrightarrow{u}'(t), \overrightarrow{u}(t)) = -\dfrac{3}{2}\begin{vmatrix} \cos(3t/2) & -\sin(3t/2) \\ \sin(3t/2) & \cos(3t/2) \end{vmatrix} = 1 \end{cases}$ donc $\lambda(t) = \sin\dfrac{t}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} f(t) &= \overrightarrow{OM}(t) + \lambda(t)\overrightarrow{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \sin(t/2)\begin{pmatrix} -\sin(3t/2) \\ \cos(3t/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos 2t - \cos t \\ \sin 2t - \sin t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos 2t + \cos t \\ \sin 2t + \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3t/2)\cos(t/2) \\ \sin(3t/2)\cos(t/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Conclusion $\boxed{f(t) = \cos(t/2)\begin{pmatrix} \cos(3t/2) \\ \sin(3t/2) \end{pmatrix}}$

Exercice 2 (CCP 2010 TSI, partie 3)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

<u>Étude en $+\infty$</u> : $t^2\dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \sim te^{-\frac{t}{x}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée ($x > 0$). Donc $\dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = o(1/t^2)$.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ intégrable en $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison $t \mapsto \dfrac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ est aussi intégrable en $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument donc converge.

Conclusion : $\boxed{\varphi(x) \text{ existe}}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$. Somme des termes d'une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$$

Par conséquent, en multipliant par $e^{-\frac{t}{x}}$,

$$\boxed{\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}}$$

3) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-\frac{t}{x}}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et par croissance comparée,

$$\lim_{t \to +\infty} t^{k+2} e^{-\frac{t}{x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to +\infty} t^2 \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = 0$$

Donc ces deux fonctions sont des petits o de $1/t^2$ en $+\infty$, et de même qu'au 1), elles sont intégrables au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, $\boxed{\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ existent}}$

Nous pouvons donc intégrer l'égalité obtenue au 2). La somme est *finie* donc par linéarité

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

4) On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$

a) $I_0(x) = \left[\dfrac{e^{-t/x}}{-1/x}\right]_0^{+\infty} = x.$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par partie. Soit $u = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v = e^{-t/x}$. Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} uv = 0$ par croissance comparée, on peut écrire

$$I_k(x) = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1}(-1/x)e^{-t/x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x(k+1)} I_{k+1}(x)$$

Conclusion : $\boxed{I_{k+1}(x) = (k+1)xI_k(x)}$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad I_k(x) = k!x^{k+1}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie d'après a).
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. $I_{k+1}(x) \overset{\text{b)}}{=} (k+1)xI_k(x) = (k+1)xk!x^{k+1} = (k+1)!x^{k+2}$. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad I_k(x) = k!x^{k+1}}$

C'est exactement le début du DL2.

5)a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 3) puis 4)c),

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(x) + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! x^{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

Donc $R_n(x) = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \,\mathrm{d}t$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \right| \mathrm{d}t$$

Or $0 < \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0, +\infty[$, ce qui entraine,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}} \,\mathrm{d}t = I_{n+1}(x) = (n+1)! x^{n+2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| \leqslant (n+1)! x^{n+2}}$

b) $u_n \neq 0$ donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)! 10^{n+2}}{10^{n+3}(n+1)!} = \frac{n+2}{10}$$

Donc pour tout $n \in \{0, \ldots, 8\}$, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et la suite est décroissante ($u_n > 0$). Pour $n \geqslant 8$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et la suite devient croissante.

Donc $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est minimale pour } n = 8}$ et $\boxed{u_8 \simeq 3.63 \times 10^{-5}}$

c) $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} (-1)^k I_k(1/10) + R_8(1/10)$, et d'après b) $|R_8(1/10)| \leqslant 4 \times 10^{-5}$.

Donc on peut obtenir $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$ avec 4 chiffres significatifs en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} (-1)^k I_k(1/10)$.

6) Soit $z \neq 0$ et $v_k = (-1)^k k! z^{k+1}$.

$$\left| \frac{v_{k+1}}{v_k} \right| = (k+1)|z| \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty > 1$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum |v_k|$ diverge grossièrement, donc $\sum v_k$ aussi.

Ainsi, $\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k k! z^{k+1} \text{ est } 0}$

En particulier cette série n'est pas convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$. On vient d'utiliser une série divergente (et pas qu'un peu divergente) pour approximer $\varphi(1/10)$....

Cet exercice est une illustration de la citation suivante de Henri Poincaré :
« Il y a entre les géomètres[1] *et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. »*

1. L'analyse est à cette époque considérée comme une partie de la géométrie.