

Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation paramétrique $M(t) = (\cos(t), \sin(t))$, et pour tout $t \in]0, 2\pi[$ $\mathscr{D}_t$ la droite $(M(t)M(2t))$.

1) Déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{u}(t)$ de la droite $\mathscr{D}_t$.
À $t \in]0, 2\pi[$ fixé, une équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}_t$ sera :

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ \lambda & \mapsto & \overrightarrow{OM}(t) + \lambda \overrightarrow{u}(t) \end{cases}$$

2) Soit Γ l'enveloppe des droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in]0,2\pi[}$, d'équation paramétrique $t \mapsto f(t)$. Obtenir $f(t)$ à l'aide du résultat suivant (au programme) :

Théorème 1
L'enveloppe Γ des droites $\mathscr{D}_t : \lambda \mapsto \overrightarrow{OA}(t) + \lambda \overrightarrow{u}(t)$ existe si $\overrightarrow{u}(t)$ et $\overrightarrow{u}'(t)$ ne sont pas colinéaires pour tout $t \in I$. Dans ce cas il existe $\lambda : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle qu'un paramétrage f de Γ vérifie

$$f(t) = \overrightarrow{OA}(t) + \lambda(t) \overrightarrow{u}(t) \tag{1}$$

$$f'(t) \text{ et } \overrightarrow{u}(t) \text{ sont colinéaires} \tag{2}$$

Exercice 2

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Notons

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

1) Justifier l'existence de $\varphi(x)$.

2) Monrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$, on a

$$\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

3) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} \, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \, \mathrm{d}t$.
En déduire que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} \, \mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

4) On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}} \, \mathrm{d}t$

a) Calculer $I_0(x)$.

b) Donner pour $k \in \mathbb{N}$ une relation entre $I_{k+1}(x)$ et $I_k(x)$.

c) En déduire que $I_k(x) = k! x^{k+1}$.

5) On pose désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! x^{k+1}$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant (n+1)!x^{n+2}$.

b) On suppose désormais que $x = \dfrac{1}{10}$, et on pose $u_n = (n+1)!(1/10)^{n+2}$. En étudiant le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que la suite (u_n) est minimale pour $n = 8$. Donner une valeur numérique de u_8 à l'aide de votre calculatrice.

c) À quelle précision peut-on obtenir une valeur de $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$, à l'aide des questions précédentes ?

6) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k k! z^{k+1}$? Cette série est-elle convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$?

Cet exercice est une illustration de la citation suivante de Henri Poincaré :
« Il y a entre les géomètres[1] *et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. »*

1. L'analyse est à cette époque considérée comme une partie de la géométrie.