Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1 (PT 2012 A)

1) a) D'après le cours de PTSI, pour tout $u \in a^{\perp}$,

$$\boxed{r(u) = (\cos\theta)u + (\sin\theta)a \wedge u}$$

b) Soit $F = \text{Vect}\,(a)$. Comme $E = \mathbb{R}^3$ est une espace euclidien, on a $E = F^{\perp} \oplus F$.
Par définition de la somme directe, tout vecteur $v \in E = \mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique $v = u + \lambda a$ avec $\lambda a \in F = \text{Vect}\,(a)$ et $u \in F^{\perp} = a^{\perp}$.

c) Soit $v = u + \lambda a \in a^{\perp} \oplus \text{Vect}\,(a)$.

$$\begin{aligned} r(v) &= \lambda r(a) + r(v) && \text{(par linéarité de } r\text{)} \\ &= \lambda a + (\cos\theta)u + (\sin\theta)a \wedge u && \text{(car } r(a) = a \text{ et d'après 1)a))} \end{aligned}$$

Or $a \wedge v = a \wedge (\lambda a + u) = \lambda \underbrace{a \wedge a}_{0} + a \wedge u = a \wedge u$, $u = v - \lambda a$, et λa est la projection orthogonale de v sur Vect a donc $\lambda a =< v, a > a$ (car (a) est une base orthonormée de Vect a) :

$$\boxed{r(v) =< v, a > (1 - \cos\theta)a + (\cos\theta)v + (\sin\theta)a \wedge v}$$

2) a) Par définition, f et g sont dans $\mathscr{O}(3)$, avec $\det f = \det g = -1$ (réflexions par rapport à des plans).
Donc $f \circ g \in \mathscr{O}(3)$ et $\det f \circ g = (\det f)(\det g) = (-1)^2 = 1$.
Par conséquent $f \circ g \in SO(3)$: c'est une $\boxed{\text{rotation}}$

- Axe : La droite Vect $(1, -1, 1)$, intersection des deux plans, est laissée invariante par les deux réflexions : elle est invariante par $f \circ g$, c'est donc l'axe de la rotation.
- Angle : Pour déterminer l'angle (qui est le double de l'angle entre les deux plans), nous allons déterminer la matrice M de $f \circ g$ dans la base canonique :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(g(i)) &=& f(i) = -j \\ f(g(j)) &=& f(-k) = -k \\ f(g(k)) &=& f(-j) = i \end{array} \right. \qquad \text{puis} \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Donc $\text{Tr}\,(M) = 0 = 1 + 2\cos\theta$ avec θ l'angle de la rotation. Ainsi $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$.
- Signe de l'angle : Pour déterminer le signe de l'angle (lorsque l'axe est orienté par $a = (1, -1, 1)$) regardons

$$\det(a, k, f(g(k))) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

  Donc la rotation a pour angle $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$.

Conclusion : $\boxed{f \circ g \text{ est une rotation d'axe (orienté) Vect}\,(1, -1, 1) \text{ et d'angle } \theta = -\dfrac{2\pi}{3}}$

b) D'après ci-dessus, $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

c) Non : $f(g((0,-1,1))) = f((0,-1,1)) = (1,0,1)$ et $g(f(0,-1,1)) = g((1,0,1)) = (1,-1,0)$.

d) Comme $f \circ g$ est une rotation d'angle $\theta = -2\pi/3$, dans une base orthonormée adaptée elle a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Le bloc de rotation $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ayant pour valeurs propres $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, on trouve pour valeurs propres complexes de $f \circ g$:

$$\boxed{1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{-\frac{2i\pi}{3}}}$$

De même, $g \circ f$ étant la rotation de même axe mais d'angle opposé, on trouve les mêmes valeurs propres. *À l'écrit, il faudrait détailler d'avantage la réponse à cette question.*

3) Soit $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Comme ${}^tMM = I_3$, $M \in \mathscr{O}(3)$.

De plus, en développant par rapport à la deuxième colonne, $\det(M) = \det \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$.

Donc $\boxed{M \text{ est la matrice d'une rotation.}}$

- Axe : On remarque que $M\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc son axe est $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Angle : Dans la base (e_2, e_1, e_3), l'endomorphisme a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

  Donc $\cos\theta = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \frac{4}{5} \geqslant 0$. Ainsi $\theta = +\operatorname{Arccos}\frac{3}{5}$

Conclusion : $\boxed{M \text{ est la matrice d'une rotation d'axe } e_2 \text{ et d'angle } \theta = +\operatorname{Arccos}\frac{3}{5}}$

4) **a)** Soit $u, v \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\alpha u + v) = (\alpha u + v) + \lambda < \alpha u + v, a > a = \alpha u + v + \lambda(\alpha < u, a > + < v, a >)a = \alpha\varphi(u) + \varphi(v)$

et $\varphi(u) \in \mathbb{R}^3$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme}}$

b) L'application φ est une isométrie si et seulement si elle préserve la norme. Or

$$\begin{aligned} \|\varphi(u)\|^2 &= \|u + \lambda < u, a > a\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, \lambda < u, a > a > + \|\lambda < u, a > a\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\lambda < u, a >^2 + (\lambda < u, a >)^2\|a\|^2 = \|u\|^2 + (2+\lambda)\lambda < u, a >^2 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $\|\varphi(u)\| = \|u\|$ entraîne $(2+\lambda)\lambda < u, a >^2 = 0$
Pour $u = a$, on trouve donc $(2+\lambda)\lambda = 0$. Or $\lambda \neq 0$ (dans ce cas, exclu par l'énoncé, $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$), donc il reste $\lambda = -2$.
Montrons, réciproquement, que $\varphi(u) = u - 2 < u, a > a$ est une isométrie :

$$\|\varphi(u)\|^2 = \|u\|^2 + 0$$

Donc $\|\varphi(u)\| = \|u\|$ (tout est positif) : φ est bien une isométrie.
Conclusion $\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est une isométrie pour } \lambda = -2}$

c) L'application $u \mapsto < u, a > a$ est la projection orthogonale sur Vect a (car $\|a\| = 1$) par conséquent $\boxed{\varphi \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à } a^{\perp}}$ ($\varphi = \text{id} - 2p$).

Exercice 2 (D'après CAPES 2011)

1) La fonction h_n est le produit d'un polynôme et d'une exponentielle, elle est $\mathscr{C}^\infty$ et en particulier $\mathscr{C}^n$. Ainsi, $\boxed{L_n \text{ est bien définie pour tout } n \in \mathbb{N}}$

2)
- $h_0(x) = e^{-x}$ donc $L_0(x) = \dfrac{e^x}{0!} h_0(x) = \boxed{1}$.
- $h_1(x) = xe^{-x}$ donc $h_1'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ puis $L_1(x) = \dfrac{e^x}{1!} h_1'(x) = \boxed{1 - x}$.
- $h_2(x) = x^2 e^{-x}$ donc $h_2'(x) = (2x - x^2)e^{-x}$ et $h_2''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}$ puis $L_2(x) = \boxed{1 - 2x + \dfrac{x^2}{2}}$.

3) Soit $m \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad h_m^{(n)} = P_n(x)e^{-x} \quad \text{avec } P_n \text{ un polynôme de degré } m$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.
- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie avec $P_0(x) = x^m$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$h_m^{(n+1)}(x) = (h_m^{(n)})'(x) = (P_n(x)e^{-x})' = (P_n'(x) - P_n(x))e^{-x}$$

  Posons $P_{n+1} = P_n' + P_n$. Comme $\deg(P_n') = \deg(P_n) - 1$ (si $m = 0$, $P_n' = 0$), $\deg(P_{n+1}) = \deg(P_n) = m$.
  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\forall n \geqslant 0$, $h_m^{(n)} = P_n(x)e^{-x}$ avec P_n un polynôme de degré m.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n = \dfrac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} P_n(x)$, et $\boxed{L_n \text{ est une fonction polynomiale de degré } n}$

4) **a)** Par définition, $\boxed{h_n^{(n)}(x) = n! L_n(x)e^{-x}}$ puis en dérivant $\boxed{h_n^{(n+1)} = n!(L_n'(x) - L_n(x))e^{-x}}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{h_{n+1}(x) = xh_n(x)}$

c) La formule de Leibniz s'écrit $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Avec $f(x) = x$ et $g = h_n$, en remarquant que $f'(x) = 1$ puis $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k > 1$, il vient :

$$\begin{aligned}
h_{n+1}^{(n+1)} &= (xh_n(x))^{(n+1)} = \binom{n+1}{0} x h_n^{(n+1)}(x) + \binom{n+1}{1} h_n^{(n)}(x) \\
&= n!x(L_n'(x) - L_n(x))e^{-x} + (n+1)n!L_n(x)e^{-x} && \text{(D'après 4a))} \\
&= (n+1)! \left(\frac{x}{n+1} L_n'(x) + + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n \right) e^{-x}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{L_{n+1} = \dfrac{X}{n+1} L_n' + \left(1 - \dfrac{X}{n+1}\right) L_n}$

5) D'une part $\left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)'(x) = (n+1)!(L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x))e^{-x}$ (4)a)) et d'autre part

$$\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)}(x) = \left((n+1)h_n - h_{n+1}\right)^{(n+1)}(x) = (n+1)n!(L_n'(x) - L_n(x))e^{-x} - (n+1)!L_{n+1}(x)e^{-x}$$

Or $\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)} = \left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)'$, donc en divisant par $(n+1)!e^{-x}$ il vient

$$(L_n' - L_n) - L_{n+1} = L_{n+1}' - L_{n+1}$$

Finalement : $\boxed{L_{n+1}' = L_n' - L_n}$

6) En dérivant l'égalité trouvée en 4)c), on trouve :

$$L'_{n+1} = \frac{1}{n+1}L'_n + \frac{X}{n+1}L''_n - \frac{1}{n+1}L_n + \left(1 - \frac{X}{n+1}\right)L'_n$$

En remplaçant L'_{n+1} par l'expression trouvée en 5) et en multipliant par $n+1$ on trouve :

$$(n+1)L'n - (n+1)L_n = L'_n + XL''_n - L_n + (n+1)L'_n - XL'_n$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \boxed{XL''_n + (1-X)L'_n + nL_n = 0}$$

Les relations obtenues en 4)c) et 5) peuvent aussi s'écrire, respectivement,

$$XL'_{n+1} - XL'_n + XL_n = 0 \qquad \text{et} \qquad XL'_n = (n+1)L_{n+1} - (n+1-X)L_n$$

En remplaçant XL'_{n+1} et XL'_n dans la première équation à l'aide de la seconde, il vient

$$\Big[(n+2)L_{n+2} - (n+2-X)L_{n+1}\Big] - \Big[(n+1)L_{n+1} - (n+1-X)L_n\Big] + XL_n = 0$$

c'est-à-dire

$$(n+2)L_{n+2} + (X-2n-3)L_{n+1} + (n+1)L_n = 0$$

En décalant les indices,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \boxed{(n+1)L_{n+1} + (X-2n-1)L_n + nL_{n-1} = 0}$$

Donc nos polynômes peuvent être vus, au choix, comme des solutions d'une famille d'équations différentielles, ou comme une suite récurrente linéaire à coefficients dans $\mathbb{R}[X]$.

7) Pour tout P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P,Q) = (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
Par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} x^2P(x)Q(x)e^{-x} = 0$ donc par définition de la limite, à partir d'un certain $x_0 \in \mathbb{R}_+$, $|x^2P(x)Q(x)e^{-x}| \leqslant 1$ *(Attention à bien mettre les valeurs absolues !!)*, puis

$$\forall x \geqslant x_0 \qquad \left|P(x)Q(x)e^{-x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$$

Or $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ intégrable au voisinage de $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par majoration la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)e^{-x}$ est aussi intégrable au voisinage de $+\infty$.
Ainsi, $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrable absolument convergente donc convergente.
Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est bien définie}}$

b)
- Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} Q(x)P(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = \varphi(Q,P)$$

  Donc $\boxed{\varphi \text{ est symétrique}}$
- Soit $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P_1(x) + P_2(x))Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda\int_0^{+\infty} P_1(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} P_2(x)Q(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda\varphi(P_1,Q) + \varphi(P_2,Q)\end{aligned}$$

  Donc $P \mapsto \varphi(P,Q)$ est linéaire. Par symétrie, $\boxed{\varphi \text{ est bilinéaire}}$

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $P^2(x)e^{-x} \geqslant 0$ donc par positivité de l'intégrale,
$$\varphi(P,P) = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
Donc $\boxed{\varphi \text{ est positive}}$
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $x \mapsto P^2(x)e^{-x}$ est **positive** et **continue** sur $\mathbb{R}_+$, donc
$$\varphi(P,P) = \int_0^{+\infty} P^2(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$$
entraîne $P^2(x)e^{-x} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. *(J'insiste lourdement : c'est presque toujours « défini » le point délicat, donc là où il faut bien justifier et où sont les points.)*
Donc $P(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$: P admet une infinité de racines. Par conséquent $P = 0$.
Réciproquement, si $P = 0$ alors $\varphi(P,P) = 0$.
Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est définie}}$

Donc φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive : c'est $\boxed{\text{Un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$

c) D'après 2), $L_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons une intégration par partie :
$$\underbrace{\int_0^A x^{n+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}\varphi(1,X^{n+1})} = \underbrace{\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^A}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}0} + (n+1)\underbrace{\int_0^A x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{}\varphi(1,X^n)}$$
Par conséquent $\varphi(L_0, X^{n+1}) = (n+1)\varphi(L_0, X^n)$. De plus $\varphi(L_0, X^0) = \varphi(1,1) = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = 1$.
Ainsi, par récurrence, $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \varphi(L_0, X^n) = n!}$

d) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. La dérivée k-ième de x^n est $\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$ Donc la formule de Leibniz s'écrit
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad h_n^{(k)}(x) = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}(-1)^{(n-p)}e^{-x} = x^{n-k}e^{-x}\sum_{p=0}^{k}(-1)^{(n-p)}\binom{k}{p}\frac{n!}{(n-p)!}x^{k-p}$$
En posant $Q_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k}(-1)^{(n-p)}\binom{k}{p}\frac{n!}{(n-p)!}X^{k-p} \in \mathbb{R}[X]$, on a $\boxed{h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}e^{-x}Q_k(x)}$

e) Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et $p \in [\![0,n]\!]$.
En faisant une intégration par partie entre 0 et $A \geqslant 0$, on trouve
$$\varphi(L_n,P) = \int_0^A L_n(x)P(x)e^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{h_n^{(n)}(x)}{n!}P(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{h_n^{(n-1)}(x)}{n!}P(x)\right]_0^A - \int_0^A \frac{h_n^{(n-1)}(x)}{n!}P'(x)\mathrm{d}x$$
Au bout de p intégrations par partie, on trouve
$$\varphi(L_n,P) = \left[\sum_{i=1}^{p}\frac{(-1)^{i+1}}{n!}\left[h_n^{(n-i)}(x)P^{(i-1)}(x)\right]_0^A\right] + \frac{(-1)^p}{n!}\int_0^A h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x$$
Or d'après d), $h_n^{(n-i)}(x) = x^i e^{-x}Q_{n-i}(x)$, donc
$$\lim_{A\to+\infty}\left[h_n^{(n-i)}(x)P^{(i-1)}(x)\right]_0^A = h_n^{(n-i)}(0)P^{(i-1)}(0) = 0 \qquad (i > 0)$$
Par conséquent,
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall p \in [\![0,n]\!],\ \boxed{\varphi(L_n,P) = \frac{(-1)^p}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)\,\mathrm{d}x}$$

f) Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$. Calculons $\varphi(L_n,L_m)$.

- Si $n>m$, d'après la question e) précédente, pour $P=L_m$ et $p=n$, on a

$$\varphi(L_n,L_m)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-n)}(x)L_m^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Or $\deg L_m=m<n$ (d'après 3)) donc $L_m^{(n)}=0$, et donc $\varphi(L_n,L_m)=0$.
Par symétrie de du produit scalaire, $\varphi(L_n,L_m)=0$ aussi lorsque $n<m$.

- Si $n=m$, de même,

$$\varphi(L_n,L_n)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n^{(n-n)}(x)L_n^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Or, si $P=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, $P^{(n)}=n!a_n$. D'après un calcul de d) (Leibniz), pour $k=n$,

$$h_n^{(n)}(x)=e^{-x}\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$$

Donc le coefficient dominant de $L_n(x)=\dfrac{e^x}{n!}h_n^{(n)}(x)$ est $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ (correspond à $p=0$).
Ainsi, $L_n^{(n)}=(-1)^n$. En remplaçant dans l'expression de $\varphi(L_n,L_n)$, on a d'après c)

$$\varphi(L_n,L_n)=\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{+\infty} h_n(x)(-1)^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^ne^{-x}\,\mathrm{d}x=1$$

Par conséquent $\varphi(L_n,L_m)=\delta_{n,m}$: $\boxed{(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille orthonormée de } \mathbb{R}[X]}$