Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté muni d'un repère orthonormé direct (i, j, k). On note $< u, v >$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^3$ des vecteurs u et v.

1) On considère la rotation r d'axe dirigé par le vecteur unitaire a et d'angle θ.

a) Rappeler l'expression générale de l'image $r(u)$ d'un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à a.

b) Montrer que tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique

$$v = u + \lambda a$$

avec a et u orthogonaux.

c) En déduire l'expression générale de l'image $r(v)$ d'un vecteur v quelconque de $\mathbb{R}^3$.

2) On considère f la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y = 0$ et g la réflexion par rapport au plan d'équation $y + z = 0$.

a) Quelle est la nature de $f \circ g$? Préciser ses éléments caractéristiques.

b) Donner la matrice de $f \circ g$ dans la base canonique.

c) Les endomorphismes f et g commutent-ils ?

d) Déterminer les valeurs propres (complexes) de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

3) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Montrer que cet endomorphisme est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

4) Soit a un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel non nul. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall u \in \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(u) = u + \lambda < u, a > a$$

a) Vérifier que φ est un endomorphisme.

b) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'application φ est-elle une isométrie ?

c) Reconnaître alors φ.

Exercice 2

On pose pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$h_n(x) = x^n e^{-x} \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x)$$

1) Justifier que L_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Calculer L_0, L_1 et L_2.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale et déterminer son degré.
Désormais, on identifiera la fonction polynomiale L_n et le polynôme associé.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer $h_n^{(n)}$ et $h_n^{(n+1)}$ en fonction de L_n et L_n'.

b) Donner une relation simple entre h_{n+1} et h_n.

c) En déduire que $L_{n+1} = \dfrac{X}{n+1} L_n' + \left(1 - \dfrac{X}{n+1}\right) L_n$.

5) En remarquant que $\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)} = \left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)'$, montrer la relation :

$$L_{n+1}' = L_n' - L_n$$

6) En utilisant les différents résultats obtenus, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X L_n'' + (1 - X) L_n' + n L_n = 0$$

et que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (n+1) L_{n+1} + (X - 2n - 1) L_n + n L_{n-1} = 0$$

7) Pour tout P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose

$$\varphi(P, Q) = (P|Q) = \int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x} \, \mathrm{d}x$$

a) Montrer que φ est bien définie.

b) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(L_0, X^n)$.

d) Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\exists Q_k \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_n^{(k)}(x) = x^{n-k} e^{-x} Q_k(x)$.

e) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall P \in \mathbb{R}[X],\ \forall p \in [\![0, n]\!],\ \varphi(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x) P^{(p)}(x) \, \mathrm{d}x$$

f) En déduire que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire φ.