Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1 (Révisions de sup – De l'endomorphisme à la matrice)

1) Considérons la famille $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ définie par

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad e_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_3' = e_1' \wedge e_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

C'est une base orthonormée, et par construction la matrice de la rotation d'angle $\pi/3$ et d'axe $\text{Vect}\left((1,1,1)\right)$ dans $\mathscr{B}'$ s'écrit

$$M' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3)\\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$$

La matrice de passage P de la base canonique (orthonormée) à $\mathscr{B}'$ (orthonormée) est orthogonale, donc

$$P = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} & -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

La matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\pi/3$ et d'axe $\text{Vect}\left((1,1,1)\right)$ est donc

$$\boxed{M = PM'P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}}$$

Vous pouviez utiliser maple pour faire ce produit pénible. Autre méthode : utiliser la question 2.

2) Si $x = \lambda a \in \text{Vect}(a)$, $f(x) = 0 + < a, \lambda a > a = \|a\|^2 \lambda a = x$. Donc $\text{Vect}(a)$ est laissé stable par f.
Si $x \in Vect(a)^\perp$ de norme 1, $f(x) = a \wedge x$. Et $(a, x, a \wedge x)$ forme une base orthonormée directe. Donc $f(x) = a \wedge x$ est obtenu en tournant x de $\dfrac{\pi}{2}$ autour de l'axe $\text{Vect}(a)$. Si $y = \lambda x$, la situation est identique : $f(y) = f(\lambda x) = \lambda f(x)$ est la rotation de y de $\pi/2$ autour de $\text{Vect}(a)$.
En conclusion, $\boxed{\text{L'application } f \text{ est la rotation d'angle } \dfrac{\pi}{2} \text{ autour de l'axe } \text{Vect}(a).}$

On remarque que $f^2(x) = f(x \wedge a + < a, x > a) = \cdots = -x + 2 < a, x > a$ est bien la symétrie d'axe $\text{Vect}(a)$.

Exercice 2 (OT TSI 2012)

C'est la généralisation de l'exercice précédent.

1) On complète la famille (ω) (orthonormée...) en une base orthonormée $\mathscr{B}' = (\omega, e_2', e_3')$. La matrice de R est alors

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}$$

2) • Soit $x = \lambda\omega$.

$$f(\omega) = (\cos\theta)\omega + (\sin\theta)\omega \wedge \omega + (1-\cos\theta) < \omega, \omega > \omega = (\cos\theta)\omega + (1-\cos\theta)\|\omega\|^2\omega = \omega$$

Donc, par linéarité, $f(x) = \lambda f(\omega) = \lambda\omega = x$. Ainsi, $f = R$ sur $\mathrm{Vect}\,(\omega)$.

• Soit $x \in \omega^\perp$. Par construction de $\mathscr{B}'$, $x = x_2e_2' + x_3e_3'$. Pour $i = 2$ ou 3,

$$\begin{aligned} f(e_i') &= (\cos\theta)e_i' + (\sin\theta)\omega \wedge e_i' + (1-\cos\theta) < \omega, e_i' > \omega = (\cos\theta)e_i' + (\sin\theta)\omega \wedge e_i' \\ &= \begin{cases} (\cos\theta)e_2' + (\sin\theta)e_3' & \text{Si } i = 2 \\ (\cos\theta)e_3' - (\sin\theta)e_2' & \text{Si } i = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $f(e_i') = R(e_i')$ pour $i = 2, 3$, donc, par linéarité, $f(x) = R(x)$.

• Conclusion : $f = R$ sur $\mathrm{Vect}\,(\omega)$ et sur $\omega^\perp = \mathrm{Vect}\,(\omega)^\perp$ Or $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}\,(\omega) \oplus \mathrm{Vect}\,(\omega)^\perp$, donc par linéarité

$$\boxed{f = R}$$

Exercice 3 (Révisions de sup – De la matrice à l'endomorphisme)

Cet exercice est important.

1) • f_1 est une symétrie orthogonale : La matrice M_1 est symétrique (réelle, donc diagonalisable...). De plus

$${}^tM_1M_1 = I_3$$

Donc M_1 est orthogonale. Ainsi, f_1 est une symétrie orthogonale.

• Éléments caractéristiques : Notons $E_\lambda = \mathrm{Ker}\,(f_1 - \lambda\,\mathrm{id}\,)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ. Comme M_1 est diagonalisable et que les seules valeurs propres sont -1 et 1,

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \dim E_1 + \dim E_{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}\ M_1 = 1 = \dim E_1 - \dim E_{-1}$$

Donc $\dim E_1 = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$. Ainsi, c'est une symétrie par rapport au plan E_1 (et parallèlement à la droite $E_{-1} = E_1^\perp$).

$M_1 - I_3 = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ donc $E_1 = \{(x,y,z) \mid x+y+z = 0\}$ est le plan d'équation $x+y+z = 0$.

Conclusion : $\boxed{f_1 \text{ est la symétrie orthogonale par rapport au plan } E_1 \text{ d'équation } x+y+z=0.}$

2) • f_2 est une rotation : La matrice M_2 est orthogonale :

$${}^tM_2M_2 = I_3$$

De plus, $\det M_2 = \ldots$ (calculs)$\ldots = 1$, donc, par définition, f_2 est une rotation.

• Éléments caractéristiques : Notons $E_1 = \mathrm{Ker}\,(f_2 - \mathrm{id}\,)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

Comme $f_2 \neq \mathrm{id}\,$, $\dim E_2 = 1$ (cf. la forme réduite d'une matrice de rotation). Il suffit donc de trouver un vecteur non nul pour déterminer E_1 :

$$M_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{6}+\sqrt{6} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut aussi réduire comme d'habitude. C'est juste l'occasion de montrer une autre façon de faire.

Donc $E_1 = \mathrm{Vect}\,(0,1,1)$ est l'axe de la rotation f_2.

De plus, si on note θ l'angle de la rotation, Tr $M_2 = 1 + 2\cos\theta = 0$ donc $\theta = \pm\dfrac{2\pi}{3}$.
Si l'axe est orienté par $\omega = (0, 1, 1)$, le signe de θ est donné par le signe du déterminant $\det(\omega, x, f_2(x))$ où x est un vecteur qui n'est pas sur l'axe, par exemple $x = (0, 1, 0)$ *(moins il y a de racines, mieux on se porte)*.

$$\det(\omega, x, f_2(x)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\sqrt{6} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\sqrt{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{6} > 0$$

Donc $\theta > 0$.

Conclusion : $\boxed{f_2 \text{ est la rotation d'axe } E_1 = \operatorname{Vect}(0,1,1) \text{ et d'angle } \theta = \dfrac{2\pi}{3}.}$

3) • <u>f_3 est une rotation</u> : La matrice M_3 est orthogonale :

$$^tM_3 M_3 = I_3$$

De plus, $\det M_3 = \ldots \text{(calculs)} \ldots = 1$, donc, par définition, f_3 est une rotation.

• <u>Éléments caractéristiques</u> : Notons $E_1 = \operatorname{Ker}(f_3 - \mathrm{id})$ le sous-espace propre associé à la valeur propre 1.
Comme $f_3 \neq \mathrm{id}$, $\dim E_3 = 1$ (cf. la forme réduite d'une matrice de rotation). Il suffit donc de trouver un vecteur non nul pour déterminer E_1 :

$$M_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $E_1 = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$ est l'axe de la rotation f_3.
De plus, si on note θ l'angle de la rotation, Tr $M_3 = 1 + 2\cos\theta = 1$ donc $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$.
Si l'axe est orienté par $\omega = (1, 1, 1)$, le signe de θ est donné par le signe du déterminant $\det(\omega, x, f_3(x))$ où x est un vecteur qui n'est pas sur l'axe, par exemple $x = (1, 0, 0)$.

$$\det(\omega, x, f_3(x)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}} > 0$$

Donc $\theta > 0$.

Conclusion : $\boxed{f_3 \text{ est la rotation d'axe } E_1 = \operatorname{Vect}(1,1,1) \text{ et d'angle } \theta = \dfrac{\pi}{2}.}$

Donc $M_3^4 = I_3$, et ainsi $M_3^{481} = M_3^{4\times 120+1} = M_3$.

Une des étourderies possibles est d'oublier la fraction devant les matrices M_i, lorsqu'on écrit $M_i - \lambda I_3$ par exemple, ou lorsqu'on calcule $\det M_i$ *ou* Tr M_i.