Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1 (Révisions de sup – De l'endomorphisme à la matrice)

1) Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'angle $\pi/3$ et d'axe $\mathrm{Vect}\,((1,1,1))$

2) Soit $a \in \mathbb{R}^3$ unitaire et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x) = a \wedge x + < a, x > a$. Reconnaître f.

Exercice 2 (OT TSI 2012)

On note R la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ autour de $\omega \in \mathbb{R}^3$ unitaire.

1) Déterminer la matrice de R dans une base adaptée.

2) On pose $f(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)\omega \wedge x + (1 - \cos\theta) < \omega, x > \omega$.
Montrer que $f(x) = R(x)$ pour $x \in \mathrm{Vect}\,(\omega)$, puis pour $x \in \omega^\perp$, puis pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

Rappel 1
${}^tMM = I_n \iff M \in \mathscr{O}(n)$
Si de plus ${}^tM = M$, alors M est une symétrie orthogonale, et $\mathrm{Tr}\ M = \dim E_1 + \dim E_{-1}$.
Sinon, regarder $\det M$ (si $= 1$, rotation) et $\mathrm{Tr}\ M$.
Dans le cas $n = 3$, en notant $\varepsilon = \det M$, $\mathrm{Tr}\ M = \varepsilon + 2\cos\theta$.

Exercice 3 (Révisions de sup – De la matrice à l'endomorphisme)

Montrer que les endomorphismes $f_i \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ associés aux matrices suivantes (dans la base canonique) sont orthogonaux.

$$M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Décrire les éléments propres. Si c'est une rotation, déterminer l'axe et l'angle. Calculer M_3^{481}.