Devoir de Mathématiques numéro 5.5

Exercice 1

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$, ainsi que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, appelée intégrale de Gauss.
Les différentes parties de ce problème sont largement indépendantes les unes des autres.

L'ensemble des nombres réels sera noté $\mathbb{R}$.

Partie 1 (existence de F et I)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par, pour tout x de $[0, +\infty[$, $f(x) = e^{-x^2}$.

1)a) Donner le tableau de variations de f. On fera figurer les limites en 0 et en $+\infty$.

b) Tracer la courbe représentative de f. On précisera la demi-tangente en $(0, 1)$ et l'asymptote.

2) Démontrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et donner sa dérivée.

3) Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

Partie 2 (calcul de I : première méthode)

On pose, pour tout x de $[0, +\infty[$,

$$G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

1) Montrer que G est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$. On pourra montrer que pour tout réel a strictement positif, la restriction de G à l'intervalle $[0, a]$ est de classe $\mathscr{C}^1$.
Donner l'expression de $G'(x)$.

2)a) Montrer que la fonction $H = F^2 + G$ est constante. On pourra faire un changement de variable linéaire dans l'une des intégrales apparaissant dans la dérivée de H.

b) Calculer cette constante en considérant $x = 0$.

3)a) Montrer que, pour tout $(x, t) \in [0, +\infty \times [0, 1] : 0 \leq \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$.
En déduire que : $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$.

b) Déduire de ce qui précède que $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4) Étudier les variations de F sur $[0, +\infty[$. Tracer sa courbe représentative en précisant la demi-tangente en $(0, 0)$ et l'asymptote.

Partie 3 (développements en séries entières)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = e^{x^2}F(x)$.

Dans cette partie, on désire étudier le développement en série entière des fonctions F et g.

1) Montrer que la fonction notée encore $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et donner son développement.

2) Donner le développement en série entière de F sur $\mathbb{R}$. On justifiera précisément.

3) On s'intéresse maintenant à la fonction g définie au début de cette partie.

On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y' - 2xy = 1$.

On désire déterminer les solutions de (E) développables en série entière et s'annulant en 0, puis en déduire que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, dont la somme sur l'intervalle $]-R, R[$ est notée y. En supposant que y est solution de (E) sur l'intervalle $]-R, R[$ et que $a_0 = 0$, montrer que $a_1 = 1$ et que, pour tout $n \geq 1$: $a_{n+1} = \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \dfrac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$.

c) Réciproquement, on considère la série entière $\sum \dfrac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$. Calculer son rayon de convergence. En déduire que sa somme est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et s'annule en 0.

d) Déduire de ce qui précède que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Donner son développement. On citera précisément le théorème utilisé.