Devoir de Mathématiques numéro 5.5

Correction

Exercice 1

Pour tout $n \geqslant 1$, $|u_n| \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, or $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ qui converge d'après Riemann, donc $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ converge aussi, et par majoration la série $\sum u_n$ converge absolument.

Conclusion : $\boxed{\text{La série } u_n \text{ converge.}}$

Exercice 2 (OT 268)

1) Le triangle ABC est stable par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, donc c'est un triangle équilatéral.

2) Les points A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon $2a$, qui est donc le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) Déterminons les équations polaires des droites (AB), (BC) et (AC). Aucune de ces droites ne passe par O, donc les équations sont de la forme

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\theta-\theta_0)}$$

où $P_0(\rho_0, \theta_0)$ est le projeté orthogonal de O sur la droite [1]. Il reste donc à calculer déterminer les projetés de O sur les droites (AB), (AC) et (BC).

- Droite (AB) : Soit K le projeté de O sur (AB), c'est-à-dire le pied de la hauteur du triangle. Comme ABC est équilatéral, la hauteur est confondue avec la médiane, et K est le milieu du segment $[AB]$. Donc $K(0, a)$.
- Droite (AC) : Soit $J(\rho_J, \theta_J)$ le projeté de O sur (AC), qui est donc de même le milieu du segment $[AC]$.

  Les médianes se coupent au $2/3$ de leur longueur, donc $\rho_J = OJ = \frac{1}{2}OB = a$.

  Le triangle OCJ est rectangle en J donc $\pi = \widehat{JOC}+\widehat{OJC}+\widehat{JCO} = \pi-\theta_J+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}$ Ainsi, $\theta_J = \frac{2\pi}{3}$.

  Donc $J(a, \frac{2\pi}{3})$.

  Autre méthode : si on note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$, comme $C = r(A)$ et $A = r(B)$, $J = r(K)$. Or en coordonnées polaires r s'exprime $(\rho,\theta) \mapsto (\rho, \theta+\frac{2\pi}{3})$. Donc $J(a, \frac{2\pi}{3})$.

- Droite (BC) : Par symétrie par rapport à l'axe (Ox), le point I a pour coordonnées $I(a, -\frac{2\pi}{3})$.

Les équations cherchées sont donc :

$$(AB) : \rho = \frac{a}{\cos(\theta)} \qquad (AC) : \rho = \frac{a}{\cos\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)} \qquad (BC) : \rho = \frac{a}{\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

Les intersections avec la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\theta = \varphi$ sont donc les points, respectivement,

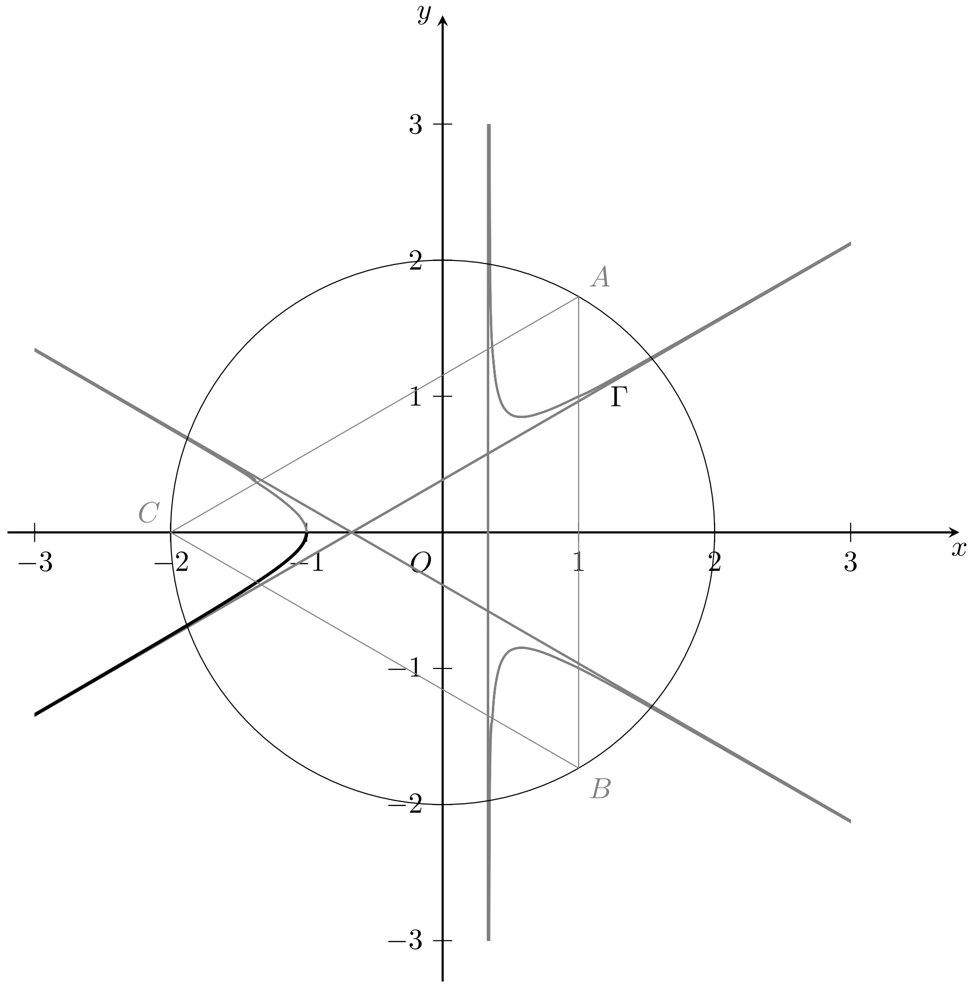
$$R\left(\frac{a}{\cos(\varphi)}, \varphi\right) \qquad P\left(\frac{a}{\cos\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)}, \varphi\right) \qquad Q\left(\frac{a}{\cos\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)}, \varphi\right)$$

1. En effet, si $M(\rho,\theta)$ est sur cette droite, $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u}_{\theta_0} = \overrightarrow{OP_0}.\overrightarrow{u}_{\theta_0} + \overrightarrow{P_0M}.\overrightarrow{u}_{\theta_0} = OP_0+0$, ce qui se traduit en $\rho\cos(\theta-\theta_0) = \rho_0$.

Les coordonnées du point G, isobarycentre des points P, Q et R, qui sont tous sur la droite d'équation $\theta = \varphi$, sont donc de la forme $G(\rho_G, \varphi)$, où

$$\rho_G = \frac{1}{3}(\rho_P + \rho_Q + \rho_R) = \frac{a}{3}\left(\frac{1}{\cos(\varphi)} + \frac{1}{\cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

4) Tracé pour $a = 1$. Par construction, la courbe est symétrique par rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ d'une part, et par rapport à l'axe (Ox) d'autre part. On trace les trois asymptotes.



Exercice 3 (Inspiré de Banque PT 2007, épreuve A)

Partie 1

1) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie car $\cos(0) = 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_1}$ est vraie car $T_1 = X$.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}, \mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $n \geqslant 1$ et $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n-1}$ vraies. $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ donc pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) = \cos((n+1)\theta)$$

- <u>Conclusion</u> : $\forall n \geqslant 0 \qquad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$

On a besoin des rangs n et $n-1$, donc il faut initialiser avec $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$. On peut aussi mettre les rangs n et $n-1$ dans $\mathcal{H}_n$, en commençant donc à $n = 1$.

2) Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- φ est symétrique, par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$:

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2 \qquad \varphi(P,Q) = \int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi Q(\cos\theta)P(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \varphi(Q,P)$$

- φ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \forall (P_1,P_2,Q) \in \mathbb{R}[X]^3\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \varphi(P,Q) &= \int_0^\pi (P_1+\lambda P_2)(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi (P_1(\cos\theta)Q(\cos\theta) + \lambda P_2(\cos\theta)Q(\cos\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi P_1(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta + \lambda\int_0^\pi P_2(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \varphi(P_1,Q) + \lambda\varphi(P_2,Q) \end{aligned}$$

  Donc $\varphi(\cdot,Q)$ est linéaire. La linéarité de $\varphi(P,\cdot)$ s'obtient par symétrie.

- $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_0^\pi (P(\cos\theta))^2\,\mathrm{d}\theta \geqslant 0$ comme intégrale d'une fonction positive.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\int_0^\pi (P(\cos\theta))^2\,\mathrm{d}\theta = 0$.

  Or $\theta \mapsto (P(\cos\theta))^2$ est une fonction continue et positive, donc son intégrale est nulle si et seulement si la fonction est nulle :

$$\forall \theta \in [0,\pi] \qquad (P(\cos\theta))^2 = 0$$

  Donc $P(t) = 0$ pour tout $t \in [-1,1]$ ($\cos\theta$ parcourt $[-1,1]$ lorsque θ parcourt $[0,\pi]$).
  Or un polynôme ayant une infinité de racine est le polynôme nul : $P = 0$.
  Ainsi, φ est définie.

En conclusion, $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$

3) Soit n et m deux entiers naturels distincts. Donc $n+m \neq 0$ et $n-m \neq 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(T_n,T_m) &= \int_0^\pi T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right]_0^\pi \mathrm{d}\theta = 0 \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $\varphi(T_n,T_n) = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{d}\theta = \pi$. Sinon,

$$\varphi(T_n,T_n) = \|T_n\|^2 = \int_0^\pi T_n(\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1+\cos(2n\theta))\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} + 0$$

En conclusion, $\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2 \quad n \neq m \quad \varphi(T_n,T_m) = 0, \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{rr} & \varphi(T_0,T_0) = \|T_0\|^2 = \pi \\ \forall n \in \mathbb{N}^* & \varphi(T_n,T_n) = \|T_n\|^2 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.}$

4) Par récurrence, T_n est de degré n. Il est nécessaire pour faire cette récurrence de déterminer le coefficient dominant de T_n (2^{n-1}) pour $n \geqslant 1$.
La famille $(T_0,\dots,T_n)$ est donc dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, elle est orthogonale d'après la question 3) précédente et composée de $n+1$ polynômes non nuls. C'est donc une *base*[2], et par définition d'une base

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X], \text{ il existe un unique } (n+1)\text{-uplet } (\alpha_0,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } P = \sum_{k=0}^n \alpha_k T_k}$$

De plus $\varphi(P,T_k) = \alpha_k\|T_k\|^2$ donc $\alpha_k = \dfrac{\varphi(P,T_k)}{\|T_k\|^2}$.

2. On peut aussi remarquer que c'est une famille de degrés échelonnés, donc une base.

5) Propriété utilisée : si $p : E \to E$ est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F de dimension finie et de base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$, alors $p(x) = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.

Comme $(T_0, \dots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$, la projection orthogonale $p : E \to E$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit :

$$\boxed{p(P) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(P, T_k)}{\|T_k\|^2} T_k}$$

(Ici, ce qui joue le rôle des e_i est $\frac{T_k}{\|T_k\|}$)

6) Si $p : E \to E$ est la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F de dimension finie, alors $d(x, F) = \|p(x) - x\|$. Ainsi,

$$\boxed{d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|p(P) - P\|}$$

Partie 2

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$.

1) Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et distributivité du produit. De plus,

$$\deg(\Phi(P)) \leqslant \max(2 + \deg(P''), 1 + \deg(P')) = \deg P$$

Donc Φ est à valeur dans $\mathbb{R}_n[X]$: $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}$

2) Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin(\theta)P'(\cos(\theta))\Big) &= \sin^2(\theta)P''(\cos(\theta)) + \cos(\theta)P'(\cos(\theta)) \\ &= (1 - \cos^2(\theta))P''(\cos(\theta)) + \cos(\theta)P'(\cos(\theta)) \\ &= \Phi(P)(\cos(\theta)) \end{aligned}$$

Par conséquent, à l'aide de deux intégrations par partie *(toujours pareil : IPP ou changement de variable...)*

$$\begin{aligned} \varphi(\Phi(P), Q) &= \int_0^\pi \Phi(P)(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin(\theta)P'(\cos(\theta))\Big)Q(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta \\ &= \underbrace{\big[\sin(\theta)P'(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\big]_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi \Big(\sin(\theta)P'(\cos(\theta))\Big)\Big(\sin(\theta)Q'(\cos(\theta))\Big)\mathrm{d}\theta \\ &= -\underbrace{\big[P(\cos(\theta))\sin(\theta)Q'(\cos(\theta))\big]_0^\pi}_{0} + \int_0^\pi P(\cos(\theta))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin(\theta)Q'(\cos(\theta))\Big)\mathrm{d}\theta \\ &= \varphi(P, \Phi(Q)) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Phi \text{ est symétrique}}$

L'endomorphisme Φ de l'espace euclidien $(\mathbb{R}_n[X], \varphi)$ est symétrique, donc diagonalisable.

3) $\Phi(P)(\cos(\theta)) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\Big(P(\cos(\theta))\Big)$, or $T_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta)$ d'après 1.1. Par conséquent,

$$\Phi(T_k)(\cos(\theta)) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\Big(T_k(\cos(\theta))\Big) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2}\Big(\cos(k\theta)\Big) = -k^2\cos(k\theta) = -k^2T_k(\cos(\theta))$$

Donc pour tout $x \in [-1, 1]$, $\Phi(T_k)(x) = -k^2T_k(x)$. Ainsi, le polynôme $\Phi(T_k) + k^2T_k$ a une infinité de racines (tout $[-1, 1]$), donc c'est le polynôme nul : $\boxed{\Phi(T_k) = -k^2T_k}$

Ainsi, $\boxed{T_k \text{ est un vecteur propre de } \Phi \text{ pour la valeur propre } -k^2.}$

4) La famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille de vecteurs propres pour l'endomorphisme symétrique Φ pour des valeurs propres deux à deux distinctes. Donc c'est une famille orthogonale.

Cf. les exercices 9 (plus la remarque qui suit) et 14 de la feuille sur les euclidiens. Vous venez de croiser les polynômes de Tchebychev, ultra-classiques.