Devoir de Mathématiques numéro 5.5

Exercice 1 (10 minutes, pour préparer la rentrée)

Déterminer la nature de la série : $u_n = (\sin n) \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 (OT 268)

De la géométrie « comme au lycée ». On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Soit $a > 0$. En coordonnées polaires (ρ, θ), on donne les points $A(2a, \frac{\pi}{3})$, $B(2a, -\frac{\pi}{3})$ et $C(2a, \pi)$.

1) Donner la nature du triangle ABC, en justifiant.

2) Étudier son cercle circonscrit, dont on précisera le centre et le rayon.

3) On considère une droite $\mathscr{D}$ passant par O. Elle coupe les droites (BC), (AC) et (AB) en P, Q et R (lorsque ces points sont définis).

Exprimer, en coordonnées polaires, les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle PQR.

4) (optionnel) Donner le lieu de G.

Exercice 3

On désigne par $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On identifiera un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$.
Enfin, P' et P'' désigneront respectivement les polynômes dérivés de P et P'.

Soit (T_k) la suite de polynômes définie par :

$$T_0 = 1 \quad ; \quad T_1 = X \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad T_{k+1} = 2XT_k - T_{k-1}$$

On considère enfin l'application φ de E^2 vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2 \quad \varphi(P,Q) = \int_0^\pi P(\cos\theta)Q(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

Partie 1

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

2) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

3) Soit n et m deux entiers naturels distincts. Calculer $\varphi(T_n, T_n)$ et $\varphi(T_n, T_m)$.

4) On admet que T_n est de degré n. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer qu'il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k$$

On exprimera α_k à l'aide de T_k et de P.

5) Exprimer la projection orthogonale $p(P)$ d'un polynôme $P \in E$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ à l'aide de $(T_0, \ldots, T_n)$.

6) Pour $P \in E$, exprimer $d(P, \mathbb{R}_n[X])$.

Partie 2

Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\Phi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'$.

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) À l'aide du calcul de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin(\theta)P'(\cos(\theta))\Big)$, montrer que Φ est symétrique. Φ est-il diagonalisable ?

3) Calculer $\Phi(T_k)$ à l'aide de la formule obtenue en 1.1. Que représente T_k pour Φ ?

4) En déduire (de nouveau) que $(T_0, \ldots, T_n)$ est une famille orthogonale.