Lycée La Prat's
Classe de PT

Pour le Jeudi 8 janvier 2015

Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 (PT B 2014)

Partie 1

1) Étude de Γ_A dans le cas où $a = b = 9$.

a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x(-t) &= -t^3 + 3t^2 + 9t &= -\left(t^3 - 3t^2 - 9t\right) &= -y(t) \\ y(-t) &= -t^3 - 3t^2 + 9t &= -\left(t^3 + 3t^2 - 9t\right) &= -x(t) \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\Gamma_A \text{ est symétrique par rapport à la droite d'équation } y = -x}$

b) x et y sont des polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x'(t) &= 3t^2 + 6t - 9 &= 3(t-1)(t+3) \\ y'(t) &= 3t^2 - 6t - 9 &= 3(t+1)(t-3) \end{cases}$$

Non, la recherche des racines d'un trinôme puis du signe de celui-ci n'est pas **la** *question centrale de l'épreuve : faites vite (et juste).*

t	0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	
x	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	27	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
y	0	$\searrow$	-11	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

Donc la courbe (pour $t \geqslant 0$) admet une tangente verticale en $M(1)$ de coordonnées $(-5, -11)$ et une tangente horizontale en $M(3)$ de coordonnées $(27, -27)$.

En $M(0) = O$ la tangente a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} -9 \\ -9 \end{pmatrix}$ et passe par O, c'est donc la première bissectrice d'équation $y = x$.

c) $M(t_1)$ est un point double s'il existe $t_2 \neq t_1$ tel que $M(t_1) = M(t_2)$

$$\begin{aligned} M(t_1) = M(t_2) &\iff \begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} t_1^3 + 3t_1^2 - 9t_1 = t_2^3 + 3t_2^2 - 9t_2 \\ t_1^3 - 3t_1^2 - 9t_1 = t_2^3 - 3t_2^2 - 9t_2 \end{cases} \qquad \text{puis } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{cases} t_1^3 + 3t_1^2 - 9t_1 = t_2^3 + 3t_2^2 - 9t_2 \\ -6t_1^2 = -6t_2^2 \end{cases} \qquad \text{or } L_2 \iff t_1 = -t_2 \text{ car } t_1 \neq t_2 \\ &\iff \begin{cases} 2t_1^3 - 18t_1 = 0 \\ t_2 = -t_1 \end{cases} \qquad \text{et } L_1 \iff 2t_1\left(t_1^2 - 9\right) = 0 \end{aligned}$$

Or si $t_1 = 0$, on a $t_2 = -t_1 = t_1$ ce qui est impossible : $t_1 \neq 0$.

Donc $\boxed{\text{le seul point double est } M(3) = M(-3) \text{ de coordonnées } (27, -27)}$

La tangente est horizontale pour $t = 3$ et, par symétrie, est verticale pour $t = -3$.

Ainsi, $\boxed{\text{L'angle entre les deux tangentes de } \dfrac{\pi}{2}}$

d) Γ_A admet une branche infinie lorsque $t \to +\infty$.

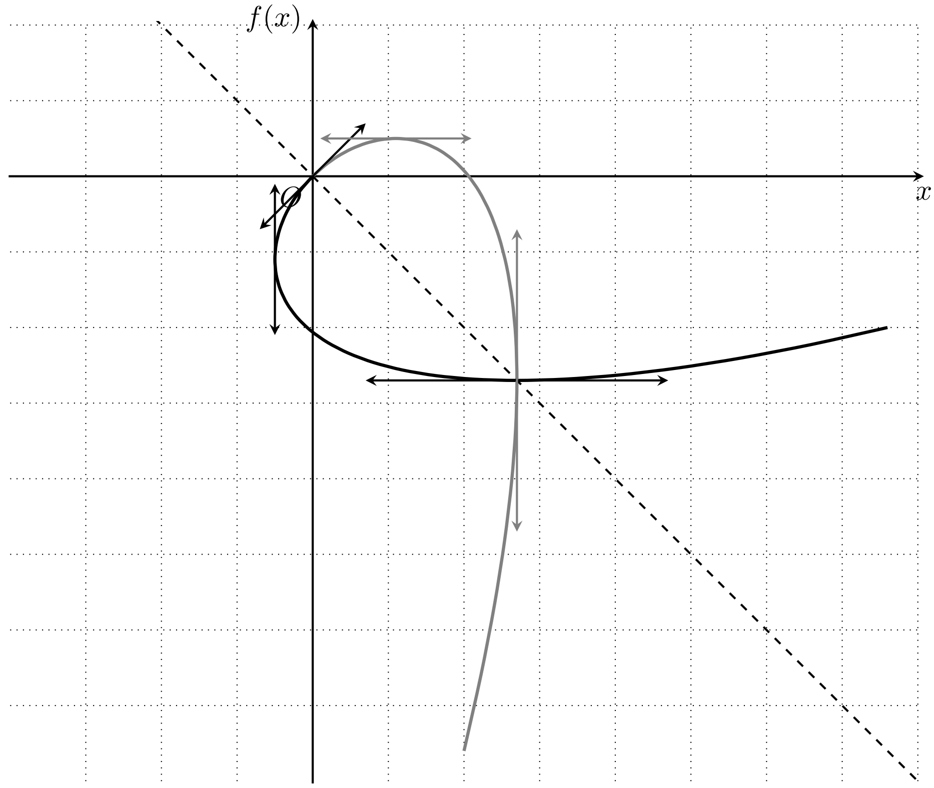
$$\frac{y}{x} \sim \frac{t^3}{t^3} = 1$$

Donc $a = 1$. De plus, $y - x = -6t^2 \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\infty$.

Conclusion : $\boxed{\text{La courbe } \Gamma_A \text{ admet une branche parabolique de direction } y = x.}$

e) Tracé :

<u>Indication</u> : *On place les points où l'une des deux dérivées s'annule (i.e. tangente verticale ou horizontale) et la tangente associée, le point double (mais c'est déjà fait), le point $O = M(0)$ (et plus généralement tous les points où l'on nous a demandé explicitement la tangente).*
Puis on trace en suivant le tableau de variation (en partant par exemple des points $(-5, -11)$ et $(27, -27)$).
On complète ensuite Γ_A par symétrie.



2) Un point stationnaire (ou singulier) est un point en lequel la vitesse s'annule :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t^2 + 6t - a = 0 \\ 3t^2 - 6t - b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3t^2 + 6t - a = 0 \\ -12t - b + a = 0 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$\iff \begin{cases} 3\left(\dfrac{a-b}{12}\right)^2 + 6\left(\dfrac{a-b}{12}\right) - a = 0 \\ t = \dfrac{a-b}{12} \end{cases} \qquad \text{(en remplaçant } t \text{ par sa valeur)}$$

Donc t existe $\Longleftrightarrow 3(a-b)^2+6\times 12(a-b)-144a=0 \Longleftrightarrow \boxed{(a-b)^2-24(a+b)=0 : \mathcal{P}}$

Partie 2 (UPS)

1) Dans le triangle CHA rectangle en H, pour l'angle $\widehat{C}$, l'hypoténuse est $CA=b$ et le coté opposé est $AH=h$ donc le sius de l'angle est $\boxed{\sin\left(\widehat{C}\right)=\dfrac{h}{b}}$

2) L'aire d'un triangle est $\dfrac{1}{2}$ base $\times$ hauteur avec ici la base qui vaut $CB=a$ et la hauteur $AH=h$ donc $\boxed{\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}ah}$

3) D'après 1), $h=b\sin\left(\widehat{C}\right)$ d'où $\boxed{\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{C}\right)}$

4) En inversant les rôles, on obtient de même $\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}ac\sin\left(\widehat{B}\right)=\dfrac{1}{2}bc\sin\left(\widehat{A}\right)=\dfrac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{C}\right)$
et en divisant par $abc\neq 0$ on obtient
$\boxed{\dfrac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{a}=\dfrac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{b}=\dfrac{\sin\left(\widehat{C}\right)}{c}}$

5) On demande **ensuite** d'interpréter en terme d'aire, on ne l'utilise donc pas directement ici.
$\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\wedge\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{HC}$ et comme $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont colinéaires,
$\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AH}$ donc $\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AH}\right\|$
$\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)$: détermiant de deux vecteurs dans l'espace, ce n'est pas défni !
On doit comprendre que c'est la restriction du déterminant au plan orienté de sorte que le triangle ABC soit direct.
$\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)=\det\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$ et $\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}$ est indirect.
$\boxed{\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{AH}\right\|=-\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right) \text{ aire du rectangle défini par } \overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}}$

6) $AB^2=\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$ et avec $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$
$\boxed{AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(\widehat{C}\right)}$.

7) Dans le triangle ABH rectangle en H : $HB^2+HA^2=AB^2$
avec $HA^2=h^2=b^2\sin\left(\widehat{C}\right)^2$
et comme le point $H\in[B,C]$ on a donc $BH=BC-HC=a-b\cos\left(\widehat{C}\right)$
d'où $BH^2=a^2+b^2\cos\left(\widehat{C}\right)^2-2ab\cos\left(\widehat{C}\right)$ et finalement

$$\begin{aligned}AB^2&=b^2\sin\left(\widehat{C}\right)^2+a^2+b^2\cos\left(\widehat{C}\right)^2-2ab\cos\left(\widehat{C}\right)\\&=a^2+b^2\left(\sin\left(\widehat{C}\right)^2+\cos\left(\widehat{C}\right)^2\right)-2ab\cos\left(\widehat{C}\right)\\&=a^2+b^2-2ab\cos\left(\widehat{C}\right)\end{aligned}$$

Exercice 2 (PT 2006 — Partie A)

1) Notons $\mathscr{E}'=\{M(x,y)|\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\}$. Montrons que $\mathscr{E}=\mathscr{E}'$ par double inclusion.

- Supposons que $M\in\mathscr{E}$ c'est-à-dire $MF+MF'=6$. Ce qui s'écrit aussi :

$$(MF+MF')^2=6^2$$

Le but est d'obtenir une écriture sans racines : donc n'avoir que des distances au carré. Pas besoin d'expliciter l'expression de MF et MF' : on sait ce que l'on veut (MF^2 et MF'^2).

Puis (comme toujours) on passe tout d'un seul coté :

$$(MF + MF')^2 - 6^2 = 0$$

Et on multiplie par une « quantité conjuguée » :

$$\Big[(MF + MF')^2 - 6^2\Big]\Big[(MF - MF')^2 - 6^2\Big] = 0$$

Appelons A l'expression obtenue. En développant il vient

$$\begin{aligned}
A &= \Big[(MF + MF')^2 - 6^2\Big]\Big[(MF - MF')^2 - 6^2\Big] \\
&= (MF + MF')^2(MF - MF')^2 - 6^2\Big[(MF + MF')^2 + (MF - MF')^2\Big] + 6^4 \\
&= (MF^2 - MF'^2)^2 - 6^2\Big[MF^2 + 2MF\,MF' + MF'^2 + MF^2 - 2MF\,MF' + MF'^2\Big] + 6^4 \\
&= (MF^2 - MF'^2)^2 - 6^2\Big[MF^2 + 2MF \times MF' + MF'^2 + MF^2 - 2MF \times MF' + MF'^2\Big] + 6^4 \\
&= (MF^2 - MF'^2)^2 - 2 \times 6^2\Big[MF^2 + MF'^2\Big] + 6^4 \qquad \textit{(victoire !)}
\end{aligned}$$

De plus, $MF^2 = (x - \sqrt{5})^2 + y^2$ et $MF'^2 = (x + \sqrt{5})^2 + y^2$, donc

$$MF^2 - MF'^2 = -4\sqrt{5}x \qquad \text{et} \qquad MF^2 + MF'^2 = 2x^2 + 10 + 2y^2$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
A &= (-4\sqrt{5}x)^2 - 2 \times 6^2\Big[2x^2 + 10 + 2y^2\Big] + 6^4 \\
&= (4^2 \times 5 - 4 \times 6^2)x^2 - 4 \times 6^2 y^2 - 4 \times 6^2 \times 5 + 6^4 \\
&= 4(20 - 36)x^2 - 4 \times 6^2 y^2 + (-20 + 36)6^2 \\
&= -16 \times 4x^2 - 4 \times 6^2 y^2 + 16 \times 6^2 \\
&= -16 \times 6^2\Big(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1\Big)
\end{aligned}$$

Donc $A = 0$ si et seulement si $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
Par conséquent $M \in \mathscr{E}'$.
Conclusion : $\mathscr{E} \subset \mathscr{E}'$.

- Supposons que $M \in \mathscr{E}'$, c'est-à-dire $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.
  D'après les calculs ci-dessus,

$$\Big[(MF + MF')^2 - 6^2\Big]\Big[(MF - MF')^2 - 6^2\Big] = -16 \times 6^2\Big(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1\Big) = 0$$

Pour simplifier par $\Big[(MF - MF')^2 - 6^2\Big]$ il faut prouver que cette expression ne s'annule pas.
Soit on utilise directement le « deuxième morceau » de l'inégalité triangulaire :

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leqslant \|x + y\|$$

soit on le redémontre : $\left\{\begin{array}{l} MF - MF' \leqslant MF' + F'F - MF' = FF' \\ MF' - MF \leqslant MF + FF' - MF = FF' \end{array}\right.$ donc

$$|MF - MF'| \leqslant FF'$$

Par conséquent $\left[(MF-MF')^2-6^2\right] \leqslant FF'^2-6^2=(2\sqrt{5})^2-6^2=20-36<0$.
Ainsi $\left[(MF-MF')^2-6^2\right] \neq 0$ et

$$\left[(MF+MF')^2-6^2\right]\left[(MF-MF')^2-6^2\right]=0 \implies \left[(MF+MF')^2-6^2\right]=0$$

Ce qui équivaut (tout est positif) à $MF+MF'=6$. Donc $M\in\mathscr{E}$.
Conclusion : $\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}$.

Finalement : $\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \mathscr{E} \text{ est } \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1}$.

2) Soit $M(t)$ de coordonnées $\begin{pmatrix}3\cos t\\ 2\sin t\end{pmatrix}$. Montrons que $M(t)\in\mathscr{E}$.

$$\frac{x^2(t)}{9}+\frac{y^2(t)}{4}=\frac{9\cos^2(t)}{9}+\frac{4\sin^2(t)}{4}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

Donc $\boxed{M(t)\in\mathscr{E}}$

Nous avons montré $\{M(t)\mid t\in[0,2\pi[\}\subset\mathscr{E}$. Pour l'inclusion inverse, il faut utiliser le paramétrage du cercle

$$X^2+Y^2=1 \Longrightarrow \exists t\in[0,2\pi[\ \left\{\begin{array}{lll} X &=& \cos t\\ Y &=& \sin t\end{array}\right.$$

3) <u>Repère de Frenet</u> : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix}-3\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}$, par conséquent $\boxed{s'(t)=\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}}$.

Par suite

- $\overrightarrow{T}=\dfrac{1}{s'(t)}\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}}\begin{pmatrix}-3\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix}$
- $\overrightarrow{N}=-\dfrac{1}{\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}}\begin{pmatrix}2\cos t\\ 3\sin t\end{pmatrix}$

<u>Rayon de courbure</u> : On calcule la première composante de $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}.\overrightarrow{\imath} &= \frac{-3}{\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}}\left(\frac{(9\cos t\sin t-4\sin t\cos t)\sin t-(9\sin^2 t+4\cos^2 t)\cos t}{(9\sin^2 t+4\cos^2 t)^{3/2}}\right)\\
&= \frac{-3\cos t}{\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}}\left(\frac{9\sin^2 t-4\sin^2 t-9\sin^2 t-4\cos^2 t}{(9\sin^2 t+4\cos^2 t)^{3/2}}\right)\\
&= \frac{-2\cos t}{\sqrt{9\sin^2 t+4\cos^2 t}}\left(\frac{6}{(9\sin^2 t+4\cos^2 t)^{3/2}}\right)\\
&= \left(\frac{6}{(9\sin^2 t+4\cos^2 t)^{3/2}}\right)\overrightarrow{N}.\overrightarrow{\imath}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{R=\dfrac{(9\sin^2 t+4\cos^2 t)^{3/2}}{6}}$

4) Par définition du centre de courbure,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} + \frac{(9\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}}{6} \frac{-1}{\sqrt{9\sin^2 t + 4\cos^2 t}} \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(9\sin^2 t + 4\cos^2 t) \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\cos t}{3}(9 - 9\sin^2 t - 4\cos^2 t) \\ \dfrac{\sin t}{2}(4 - 9\sin^2 t - 4\cos^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\cos t}{3}(5\cos^2 t) \\ \dfrac{\sin t}{2}(-5\sin^2 t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{3}\cos^3 t \\ -\dfrac{5}{2}\sin^3 t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\text{Les coordonnées du centre de courbure sont } (\frac{5}{3}\cos^3 t, -\frac{5}{2}\sin^3 t).}$

5) C'est une Astroïde (à titre culturel), déjà étudiée dans l'exercice 7, à un déformation près.

Exercice 3

- Le domaine de définition est $\mathbb{R}^*$. Il n'y a pas de symétries.

  Donc $\boxed{\text{Le domaine d'étude est } \mathbb{R}^*}$

- <u>Variations de x et y</u> :

$$x'(t) = 2t - \frac{2}{t^2} = 2\frac{t^3 - 1}{t^2} = 2\frac{(t-1)\overbrace{(t^2+t+1)}^{>0}}{t^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$$

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$-$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

- <u>Limites</u> : (reportées dans le tableau de variations)

  En l'infini,
  $x \sim t^2$ donc $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$
  $y \sim t$ donc $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$

  En 0,
  $x \sim \dfrac{2}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to0^-} x(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to0^+} x(t) = +\infty$
  $y \sim \dfrac{1}{t}$ donc $\lim\limits_{t\to0^-} y(t) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to0^+} y(t) = +\infty$

- <u>Points singuliers</u> : Il y a un point singulier en $t = 1$: $x'(1) = y'(1) = 0$. Soit $f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

  En dérivant $f'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t - 2t^{-2} \\ 1 - t^{-2} \end{pmatrix}$, on trouve $f''(t) = \begin{pmatrix} 2 + 4t^{-3} \\ 2t^{-3} \end{pmatrix}$.

  Donc en $t = 1$, il vient $f''(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$

  Donc la tangente est portée par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $p = 2$ donc c'est un point de rebroussement.

De plus $f'''(t) = \begin{pmatrix} -12t^{-4} \\ -6t^{-4} \end{pmatrix}$ donc $f'''(1) = -6\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $f''(1)$ et $q = 3$: c'est un point de rebroussement de première espèce.

- <u>Branches infinies</u> : Au vu du tableau de variation, il y a 4 branches infinies, en $-\infty$, 0^-, 0^+ et $+\infty$.
  - Au voisinage de $t = 0$:
$$\frac{y}{x} \sim \frac{1/t}{2/t} = \frac{1}{2}$$
Donc $a = \dfrac{1}{2}$. Et $y - \dfrac{1}{2}x = t + 1 + \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1$.
En conclusion : $\boxed{\text{Au voisinage de } t = 0\text{, il y a un asymptote d'équation } y = \frac{1}{2}x + 1}$
  - Au voisinage de $+\infty$:
$$\frac{y}{x} \sim \frac{t}{t^2} = \frac{1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$
Ainsi $\boxed{\text{La courbe a une branche parabolique de direction } (Ox)}$
  - De même, au voisinage de $-\infty$, $\boxed{\text{La courbe a une branche parabolique de direction } (Ox)}$
- Tracé :
On place les points où l'une des deux dérivées s'annule (i.e. tangente verticale ou horizontale) et la tangente associée, le point singulier et sa tangente, l'asymptote. Puis on trace en suivant le tableau de variation (en partant par exemple des points $(-1,-1)$ et $(3,3)$).
On remarque qu'il faut étudier la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote. Au voisinage de 0^+ :
$$y - \frac{1}{2}x - 1 = t - \frac{1}{2}t^2 = t + o(t)$$
donc la courbe est au-dessus ($t > 0$) de l'asymptote.
Pour $t = 0^-$ le calcul reste valable et, comme $t < 0$, la courbe est sous l'asymptote.