Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

Partie 1

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le point A de coordonnées (a, b), où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
À chaque point A du plan, on associe la courbe Γ_A ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - at \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - bt \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Étude de Γ_A dans le cas où $a = b = 9$.

- **a)** Montrer queΓ_A possède un axe de symétrie que l'on précisera. On étudiera donc x et y sur $\mathbb{R}_+$.
- **b)** Étudier les variations de x et de y ; on consignera les résultats dans un tableau de variations en précisant les tangentes verticales, horizontales et la tangente au point de paramètre 0.
- **c)** Montrer que Γ_A possède un point double que l'on précisera.
  Indication : *On fera un calcul explicite, en partant de $M(t_1) = M(t_2)$ et en explicitant t_1 et t_2.*
  Déterminer l'angle formé par les deux tangentes à Γ_A au point double.
- **d)** Étudier la branche infinie de la restriction de Γ_A à $\mathbb{R}_+$
- **e)** Tracer Γ_A.

2) On revient au cas général.
Montrer que la courbe Γ_A possède un point stationnaire si et seulement si A appartient à une courbe $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation.

Partie 2

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$, et A, B, C trois points non alignés de ce plan. On suppose que le triangle ABC est direct, et n'a que des angles aigus. On note :

$$a = BC \quad , \quad b = AC \quad , \quad c = AB$$

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), et on note $h = AH$.
$\widehat{A}$ désigne l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, $\widehat{B}$ l'angle géométrique $\widehat{CBA}$, et $\widehat{C}$ l'angle géométrique $\widehat{ACB}$.
Pour cet exercice, le tracé d'un dessin sur la copie sera apprécié.

1) Donner la relation entre $\sin\left(\widehat{C}\right)$, h et b.

2) Rappeler la formule donnant l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $\widehat{ABC}$ en fonction de a et h.

3) Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de a, b et $\sin\left(\widehat{C}\right)$.

4) Montrer que : $\dfrac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{a} = \dfrac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{b} = \dfrac{\sin\left(\widehat{C}\right)}{c}$

5) Comparer $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\right\|$ et $\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right)$. Donner une interprétation en termes d'aires du résultat obtenu.

6) Exprimer AB^2 en fonction de a, b et $\cos\left(\widehat{C}\right)$.

7) Retrouver le résultat de la question 6. à l'aide du théorème de Pythagore.

Exercice 2

Soit F et F' deux points du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées respectives $(\sqrt{5}, 0)$ et $(-\sqrt{5}, 0)$.
On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 6$.

1) Former une équation cartésienne (sans radicaux) de $\mathscr{E}$.

2) Montrer que les points $M(t)$ de coordonnées, pour $t \in [0, 2\pi[$,

$$x(t) = 3\cos t \qquad \text{et} \qquad y(t) = 2\sin t$$

sont des points de $\mathscr{E}$.

On admet que $t \mapsto M(t)$, défini sur $[0, 2\pi[$, est un paramétrage de $\mathscr{E}$.

3) Déterminer le repère de Frenet de cet arc au point $M(t)$, puis le rayon de courbure en ce point.

4) En déduire les coordonnées du centre de courbure de $\mathscr{E}$ associé au point $M(t)$.

5) Reconnaître la développée de $\mathscr{E}$.

Exercice 3

Étude complète de la courbe Γ ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t + 1 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$$