Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 (Concours national marocain 2010 — épreuve 2, partiel)

Partie 1

1) Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_f(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 2-\lambda & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \qquad (C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3) \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)^2 \qquad (L_i \leftarrow L_i - L_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\chi_f(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)^2}$$

2) • $\underline{\lambda = 2}$: Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre 2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$(A-2I_3)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & - & x_3 & = 0 \\ & x_2 & - & x_3 & = 0 \\ & x_2 & - & x_3 & = 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

D'où $x_2 = x_3 = x_1$. Ainsi $\boxed{E_2 = \mathrm{Vect}\,((1,1,1)).}$

• $\underline{\lambda = 1}$: Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$(A-I_3)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

D'où $x_2 = 0$ et $x_3 = x_1$. Ainsi $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\,((1,0,1)).}$

Par conséquent $\dim E_1 = 1 < 2$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

3) Calculons : $$(A-I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dès lors, $x \in \operatorname{Ker}(f-\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})^2 \iff (A-I_3)^2X = 0 \iff \boxed{x_1+x_2-x_3=0}$. Et $\boxed{\dim \operatorname{Ker}(f-\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})^2 = 2}$

4) Après calcul matriciel, $e_1 = (f-\operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2) = (-2,0,-2) \in E_1$.

a) Puisque e_3 est un vecteur propre de f, $e_3 \in E_1 = \operatorname{Vect}((1,0,1))$ ou $e_3 \in E_2 = \operatorname{Vect}((1,1,1))$. Or la deuxième composante de e_3 est égale à 1, donc $e_3 \notin E_1$. Par conséquent $e_3 \in E_2$ et $\boxed{e_3 = (1,1,1)}$

Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\det(P) = -2 \neq 0$, $\boxed{\text{la famille } (e_1,e_2,e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ et P est la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base.

b) $e_1 \in E_1$ et $e_3 \in E_2$, donc $f(e_1) = e_1$ et $f(e_3) = e_3$. Donc B est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 2 \end{pmatrix}$$

Or $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $f(e_2) = e_1 + e_2$

(on peut se douter que la matrice cherchée est triangulaire, donc que seuls e_1 et e_2 interviennent, ce qui simplifie la recherche des coordonnées).

Conclusion : $$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A = PBP^{-1}}$$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $B^0 = I_3$ est vrai.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$B^{n+1} = B^nB = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

De plus, $A = PBP^{-1}$ donc $A^n = PB^nP^{-1}$.

[insérer ici un pivot de Gauss pour inverser P] $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Finalement, $\boxed{\forall n \geqslant 0 \quad A^n = \begin{pmatrix} -2 & -2n+1 & 2^n \\ 0 & -1 & 2^n \\ -2 & -2n & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n-2n & 2^n-1 & -2^n+2n+1 \\ 2^n-1 & 2^n & -2^n+1 \\ 2^n-2n-1 & 2^n-1 & 2^n+2n+2 \end{pmatrix}}$

On vérifie rapidement le calcul de A^n en $n=0$ et $n=1$, on retrouve bien I_3 et A : c'est sans doute juste.

Partie 2

1) **a)** Si f n'admet qu'une seule valeur propre α, alors $\operatorname{Tr} A = 3\alpha = -3$ donc $\alpha = -1$, ce qui nous guide dans le calcul du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}\chi_f(\lambda) &= \det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix}-2-\lambda & 5 & 2\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 2 & -10 & -5-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1-\lambda & 1+\lambda & 0\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 0 & -2(1+\lambda) & -1-\lambda\end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2\end{matrix}\\ &= (1+\lambda)^2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 4-\lambda & 2\\ 0 & -2 & -1\end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(4-\lambda-1-4) = -(\lambda+1)^3\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ a une seule valeur propre } \alpha = -1.}$

Si f était diagonalisable, A serait donc semblable à $-I_3$, et serait par conséquent déjà égal à la matrice $-I_3$ dans la base canonique. Or $A \neq -I_3$. De sorte que $\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

b) Soit $E_{-1} = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{id})$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1. Or

$$A + I_3 = \begin{pmatrix}-1 & 5 & 2\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & -10 & -4\end{pmatrix}$$

$C_2 = -5C_1$ et $C_3 = -2C_1$ donc $\operatorname{rg}(A+I_3) = 1$.

D'après le théorème du rang, $\boxed{\dim E_{-1} = 3 - \operatorname{rg}(A+I_3) = 2}$

c) **i)** $(A+I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ Donc $\varepsilon_2 = (-1,-1,2)$. De surcroît,

$$(A+I_3)\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{et} \qquad (A+I_3)\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

Ainsi, $\boxed{\varepsilon_2 \text{ et } \varepsilon_3 \text{ sont des éléments de } \operatorname{Ker}(f - \alpha\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}).}$

ii) Soit $\boxed{P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}.}$ Comme $\det(P) = -1 \neq 0$, $\boxed{\text{la famille } \mathscr{B}_1 \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ et P est la matrice de passage de la base canonique à la à la base $\mathscr{B}_1$.

2) Par construction, $f(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, et d'après la question 1)c)i., $f(\varepsilon_2) = -\varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$. Il vient

$$\boxed{B = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}}$$

La matrice P a été déterminée en 1)c)ii. [insérer ici l'inversion de P]. En conclusion

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -5 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = PBP^{-1}}$$

3) **a)** $J = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, par suite $\boxed{J^2 = 0}$.

b) D'après la question précédente, $J^2 = 0$, donc $J^i = 0$ pour tout $i \geqslant 2$. De plus, $-I$ et J commutent, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le binôme de Newton s'écrit

$$B^k = (-I + J)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} J^i = (-1)^k I + (-1)^{k-1} kJ = (-1)^k (I - kJ)$$

En conclusion, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{B^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A^k = PB^kP^{-1} = (-1)^k \begin{pmatrix} k+1 & -5k & -2k \\ k & -5k+1 & -2k \\ -2k & 10k & 4k+1 \end{pmatrix}}$$

Même remarque que pour le précédent A^n, sauf que je l'ai vraiment fait cette fois-ci.

4) a) Soit $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.

Le système (S) équivaut alors à l'équation différentielle matricielle $X'(t) = AX(t)$.

b) Notons $Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. $X = PY$, puisque Y est le vecteur colonne de $\varphi(t)$ dans la base $\mathscr{B}_1$ et P est la matrice de passage de la base canonique dans $\mathscr{B}_1$.

Par linéarité de la dérivation, $X'(t) = PY'(t)$, et il vient $PY'(t) = X'(t) = AX(t) = APY(t)$

Si bien que $Y'(t) = P^{-1}APY(t) = BY(t)$, ce qui donne le système

$$\boxed{(S_1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -x(t) \\ y'(t) & = & x(t) - y(t) \\ z'(t) & = & -z(t) \end{array} \right.}$$

c) D'après l'énoncé, $X(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = Y(0) = P^{-1}X(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $\boxed{x(0) = -2,\ y(0) = 0 \text{ et } z(0) = 1.}$

d) La première ligne donne $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad x(t) = -2e^{-t}}$ et la dernière $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad z(t) = e^{-t}}$.

L'équation en y s'écrit donc $y' + y = -2e^{-t}$. Elle a pour solution homogène $t \mapsto Ce^{-t}$ et la variation de la constante s'écrit

$$C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = -2e^{-t}$$

Donc $C(t) = -2t + K$, puis $y(t) = (-2t + K)e^{-t}$. La condition initiale nous donne finalement

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad y(t) = -2te^{-t}}$$

e) $X = PY$, donc $u = x - y + z$, $v = -y$, $w = 2y + z$. En conclusion

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & (2t-1)e^{-t} \\ v(t) & = & 2te^{-t} \\ w(t) & = & (-4t+1)e^{-t} \end{array} \right.}$$

Exercice 2 (oral ENSAM, 2013)

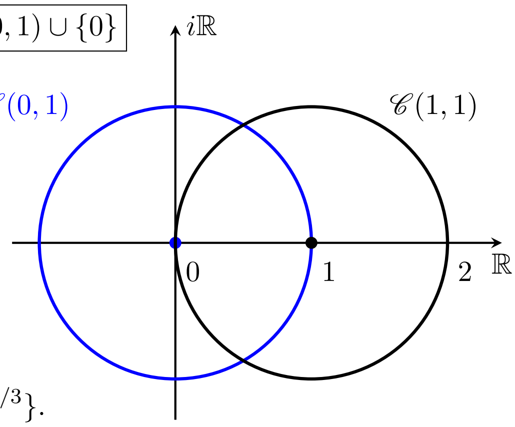
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Si $P = c$ est un polynôme constant, alors l'équation s'écrit $c = c^2$ et les seules solutions sont $c = 0$ ou $c = 1$.

Supposons désormais $\deg P \geqslant 1$.

Notons $Z(P)$ l'ensemble des racines (complexes) de P.

- Soit $\alpha \in Z(P)$. Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0$, donc α^2 est aussi une racine de P.
  Par récurrence, α^{2^n} est une racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  Or P a un nombre fini de racines. Donc les α^{2^n} ne peuvent pas être des nombres tous distincts. Une des conséquences est que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$.
  Si on note $\mathscr{C}(0,1)$ le cercle de centre 0 et de rayon 1, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}}$
- Soit $\alpha \in Z(P)$.
  Alors $P\Big((\alpha-1)^2\Big) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$, donc $(\alpha-1)^2 \in Z(P)$.
  Or $Z(P) \subset \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$, donc $(\alpha-1)^2 \in \mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}$,
  c'est-à-dire $|\alpha - 1| = 1$ ou $(\alpha - 1) = 0$.
  Ainsi, $\alpha \in \mathscr{C}(1,1)$ ou $\alpha = 1$.
  Par conséquent, $\boxed{Z(P) \subset \mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}}$



- Ainsi, $\mathbb{Z}(P) \subset \Big(\mathscr{C}(0,1) \cup \{0\}\Big) \cap \Big(\mathscr{C}(1,1) \cup \{1\}\Big) = \{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$.
  Si $\alpha = e^{i\pi/3}$, $\alpha^2 = e^{2i\pi/3} \notin Z(P)$, alors que d'après le premier point $\alpha^2 \in Z(P)$. Par conséquent $e^{i\pi/3}$ est à exclure, et de même $e^{-i\pi/3}$. Il reste donc :
  $$\boxed{Z(P) \subset \{0,1\}}$$
- D'après ci-dessus, les seules racines possibles de P sont 0 et 1.
  Donc $P(X) = cX^p(X-1)^q$ avec $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
  L'équation fonctionnelle s'écrit donc :
  $$P(X^2) = cX^{2p}(X^2-1)^q = c^2X^p(X-1)^q(X+1)^pX^q = P(X)P(X+1)$$
  En décomposant $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, l'égalité précédente s'écrit :
  $$cX^{2p}(X-1)^q(X+1)^q = c^2X^{p+q}(X-1)^q(X+1)^p$$
  En identifiant (par unicité de la décomposition en facteurs $(X-\lambda)^\alpha$), il vient $c = 1$, $2p = p+q$, $q = q$ et $q = p$. Donc $P = X^p(X-1)^p$.
  Réciproquement, $P = X^p(X-1)^p$ vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Conclusion : $\boxed{\text{Les polynômes } P \text{ vérifiant } P(X^2) = P(X)P(X+1) \text{ sont } P = 0, \text{ et } P = X^p(X-1)^p \text{ avec } p \in \mathbb{N}.}$

Exercice 3 (PT 2012, A partie I et II)

Partie 1

1) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = BA$ donc $\boxed{f \text{ et } g \text{ commutent.}}$

2)
- Étude de f : Le polynôme caractéristique de f est
  $$\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = -(\lambda-1)^3$$
  Donc 1 est valeur propre triple. Comme $A \neq I_3$, $\boxed{A \text{ est n'est pas diagonalisable}}$ (sinon, A serait semblable à $1 \times I_3$ et donc égal à I_3).
  Par contre le polynôme caractéristique de f est *scindé*, donc $\boxed{A \text{ est trigonalisable}}$
  Calcul de $E_1(f)$ *...après calculs...* $\boxed{E_1(f) = \mathrm{Vect}\,\Big((1,0,0),(0,1,-1)\Big)}$.
- Étude de g : Le polynôme caractéristique de g est (opération : $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$ puis $L_3 \rightarrow L_3 + L_2$).
  $$\begin{aligned}\chi_g(\lambda) = \det(g - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -2+\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-2)^2\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont : $\begin{cases} \lambda &= 0 \quad \text{de multiplicité} \quad \alpha = 1 \\ \lambda &= 2 \quad \text{de multiplicité} \quad \alpha = 2 \end{cases}$.

Sous-espaces propres : *...après calculs...* $\boxed{E_0(g) = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}\big((2,1,-1)\big)}$ et $\boxed{E_2(g) = \operatorname{Vect}\big((0,1,-1)\big)}$

Comme $\dim E_0(g) + \dim E_2(g) = 2 < \dim \mathbb{R}^3$, $\boxed{B \text{ est n'est pas diagonalisable}}$ (on pouvait conclure dès que $\dim E_2(g) = 1 < \alpha_2 = 2$).

Par contre le polynôme caractéristique de g est *scindé*, donc $\boxed{B \text{ est trigonalisable}}$

3) Posons $e_2 = (2,1,-1)$. D'après 2), $e_2 \in E_1(f)$ et $e_2 \in E_0(g)$. Donc e_2 est stable par f et g. De plus, $e_2 \notin E_2(g)$, il ne peut donc pas être colinéaire à e_1.

4) Posons $e_3 = (0,0,1)$. Montrons que $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base : soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det P = \left|\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 \end{array}\right| = \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

Donc $\mathscr{B}'$ est une base. De plus

$\begin{cases} f(e_1) &= e_1 \\ f(e_2) &= e_2 \end{cases}$ donc $\operatorname{Mat}(f, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. *(comme la matrice est triangulaire, les valeurs propres sont sur la diagonale et la dernière $*$ en bas vaut 1 : ce n'est pas demandé)*

De même, $\begin{cases} g(e_1) &= 2e_1 \\ g(e_2) &= 0 \end{cases}$ donc $\operatorname{Mat}(g, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$. *(idem avec 2 au lieu de 1)*

Conclusion : $\boxed{\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de trigonalisation commune à } f \text{ et } g}$

Partie 2

1) Chacune des valeurs propres λ_i est de multiplicité 1. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i est donc de dimension 1 exactement. Soit e_i une base de ce sous-espace propre.

Montrons que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre : soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i = 0$.

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i = 0\right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(e_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i = 0$$

En combinant λ_1 fois la première équation et cette nouvelle équation, on trouve $\sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_1)\alpha_i e_i = 0$.

En posant $\alpha_i' = (\lambda_i - \lambda_1)\alpha_i$ pour $i \in \{2, \ldots, n\}$, qui est nul si et seulement si α_i est nul, et en poursuivant par récurrence, on obtient finalement $\alpha_n^{(n-1)} e_n = 0$.

Or $e_n \neq 0$ (vecteur propre), donc $\alpha_n^{(n-1)} = 0$.

Par récurrence, $\alpha_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Donc la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre.

Or $\dim \mathbb{C}^n = n = \operatorname{Card}((e_1, \ldots, e_n))$. Donc c'est une base :

$\boxed{\text{Il existe une base } (e_1, \ldots, e_n) \text{ de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } f.}$

La question n'était pas clair : doit-on redémontrer le résultat du cours (ce que je ne fais pas proprement ici, cf le cours pour mieux), ou peut-on l'utiliser ? Ou utiliser la caractérisation à l'aide des dimension des sous-espace propre ?

2) **a)** Par linéarité de f, $f \circ u = f \circ \left(\sum_{i=0}^{d} a_i f^i\right) = \sum_{i=0}^{d} a_i f \circ f^i = \sum_{i=0}^{d} a_i f^{i+1}$.

Par définition de la somme et du produit par un scalaire sur les fonctions, $u \circ f = \sum_{i=0}^{d} a_i f^{i+1}$.

Donc $f \circ u = u \circ f$.
Finalement, $\boxed{f \text{ et } u \text{ commutent}}$

b) Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Posons $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_n)$ la base de vecteurs propres du 1).
Comme $f(e_k) = \lambda_k e_k$, par une récurrence immédiate $f^i(e_k) = \lambda_k^i e_k$.
En combinant on trouve $u(e_k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i f^i(e_k) = \sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_k^i e_k = \left(\sum_{i=0}^{d} a_i \lambda_k^i\right) e_k = P(\lambda_k) e_k$

Donc dans la base $\mathscr{B}'$ la matrice de u s'écrit $\operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$

En conclusion, les valeurs propres de u sont les $(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$ et u est diagonalisable dans la même base $\mathscr{B}'$ que f.

3) **a)** Nous avons déjà utilisé en 1) que $\dim E_{\lambda_i} = 1$.
En effet E_{λ_i} contient au moins un vecteur non nul donc $\dim E_{\lambda_i} \geqslant 1$. De plus, $\dim E_{\lambda_i} \leqslant \alpha_i$, multiplicité de la valeur propre λ_i dans le polynôme caractéristique. Or ici, $\alpha_i = 1$.
Donc par encadrement, $\boxed{\dim E_{\lambda_i} = 1}$

b) Nous avons vu en exercice que « f et g commutent » entraîne « les sous-espaces propres de f sont stables par g (et vis versa) ». Ce n'est évidemment pas un résultat utilisable sans démonstration dans une copie. Dans le sujet de 2012, la question était posée en préliminaire, donc il suffisait de citer le résultat de cette question.
Comme f et g commutent, les sous-espaces propres de f sont stables par g (préliminaire) : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $g(E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}$.
En particulier, comme $E_{\lambda_i} = \operatorname{Vect} e_i$, $g(e_i) \in \operatorname{Vect}(e_i)$.
Ce qui nous donne finalement $g(e_i) = \mu_i e_i$: $\boxed{e_i \text{ est également un vecteur propre de } g}$

c) Ainsi, d'après c), la matrice de g dans $\mathscr{B}'$ est

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{\text{L'endomorphisme } g \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{B}'}$

d) Soit P le polynôme interpolateur de Lagrange qui vérifie $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$$

Ce polynôme est bien défini car les λ_i sont deux à deux distincts par hypothèse. De plus,

$$\boxed{\deg P = n - 1}$$

Dans la base $\mathscr{B}'$, notons $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ la matrice de f.

D'après 2)b), $\operatorname{Mat}(P(f), \mathscr{B}') = P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ par construction de P.

Or d'après 3)c), $\operatorname{Mat}(g, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$. Donc $\operatorname{Mat}(g, \mathscr{B}') = \operatorname{Mat}(P(f), \mathscr{B}')$.

Par conséquent, $\boxed{g = P(f)}$.