

Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

Partie 1

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) Calculer le polynôme caractéristique χ_f de f.

2) Déterminer les sous-espaces propres de f. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

3) Calculer la matrice $(A - I_3)^2$ et donner une équation et la dimension de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})^2$.

4) On pose $e_2 = (1, -1, 0)$ et $e_1 = (f - \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})(e_2)$.

- **a)** Trouver un vecteur propre e_3 de f dont la deuxième composante est égale à 1 et justifier que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
- **b)** Écrire la matrice B de f dans cette base et exprimer A en fonction de B.
- **c)** Calculer B^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie 2

Dans cette partie, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ désigne la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$; on rappelle que $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

1) **a)** Montrer que f n'admet qu'une seule valeur propre notée α. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

- **b)** Caractériser le sous-espace propre de f associé à la valeur propre α. Quelle est sa dimension ?
- **c)** On pose $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = (f - \alpha \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})(\varepsilon_1)$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 + e_3$.
  - **i)** Montrer que ε_2 et ε_3 sont des éléments de $\operatorname{Ker}(f - \alpha \operatorname{id}_{\mathbb{R}^3})$.
  - **ii)** Montrer que $\mathscr{B}_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Écrire la matrice B de f dans la base $\mathscr{B}_1$, et la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathscr{B}_1$. Calculer P^{-1}. Exprimer A à l'aide des matrices B, P et P^{-1}.

3) On pose $J = I + B$ où I est la matrice identité d'ordre 3.

- **a)** Calculer J^2.
- **b)** En déduire B^k puis A^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4) On considère trois fonctions u, v et w de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u'(t) & = & -2u(t) & + & 5v(t) & + & 2w(t) \\ v'(t) & = & -u(t) & + & 4v(t) & + & 2w(t) \\ w'(t) & = & 2u(t) & - & 10v(t) & - & 5w(t) \end{array} \right.$$

- **a)** Montrer que le système (S) équivaut à l'équation différentielle matricielle $X'(t) = AX(t)$, où $X(t)$ est un vecteur colonne que l'on précisera.

b) Si $\varphi(t) \in \mathbb{R}^3$ a pour vecteur colonne dans la base canonique $X(t)$, on écrit

$$\varphi(t) = x(t)\varepsilon_1 + y(t)\varepsilon_2 + z(t)\varepsilon_3$$

Donner le système (S_1) d'équations différentielles vérifiées par x, y et z.

c) On suppose que $u(0) = v(0) = 0$ et que $w(0) = 1$; calculer alors $x(0)$, $y(0)$ et $z(0)$.

d) Résoudre (S_1) avec les conditions initiales trouvées à la question précédente.

e) En déduire la solution de (S) vérifiant les conditions initiales $u(0) = v(0) = 0$ et $w(0) = 1$.

Exercice 2 (oral ENSAM, 2013)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

Exercice 3

Partie 1

Soit $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f et g commutent.

2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espace propre de f et g.
Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? trigonalisables ?

3) On note e_1 un vecteur propre de g associé à la valeur propre 2. Déterminer un vecteur e_2 non colinéaire à e_1 tel que le sous-espace $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ soit stable par f et par g.

4) Construire une base $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ de trigonalisation commune à f et g.

Partie 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. , et soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

1) Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de f.

2) Soit $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$. On considère le polynôme P défini par

$$P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

Soit u l'endomorphisme de E défini par

$$u = P(f) = \sum_{i=0}^{d} a_i f^i$$

avec $f^0 = \operatorname{id}_E$ l'application identité de E, et pour $k \geqslant 1$, $f_k = f \circ \cdots \circ f$ est la k-ième composée de f.

a) Montrer que f et u commutent.

b) Exprimer les valeurs propres de u en fonction de celles de f et montrer que u est diagonalisable dans la même base que f.

3) Soit g un endomorphisme de E qui commute avec f.

a) quelle est la dimension de E_{λ_i}, sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i ?

b) En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i est également un vecteur propre de g. On notera μ_i la valeur propre associée.

c) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

d) Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $g = P(f)$.
Indication : *Utiliser le polynôme interpolateur de Lagrange P qui vérifie $P(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i.*