Lycée La Prat's
Classe de PT

Pour le Jeudi 10 janvier 2013

Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 (E3A PC 2012)

1) En simplifiant par 1/9, il vient

$$\begin{aligned}
M \in S &\iff \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff x(2x-2y-z) + y(4x-4y-2z) + z(-4x+4y+2z) = 0 \\
&\iff x(2x-2y-z) + 2y(2x-2y-z) - 2z(2x-2y-z) = 0 \\
&\iff (2x-2y-z)(x+2y-2z) = 0
\end{aligned}$$

Nous venons donc de montrer que $M \in S \iff \begin{cases} 2x-2y-z=0 \\ \text{ou} \\ x+2y-2z=0 \end{cases}$

Ainsi, S est la réunion des plans d'équations $2x-2y-z=0$ et $x+2y-2z=0$. Or les vecteurs normaux de ces plans, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ont pour produit scalaire $2-4+2=0$. En conclusion,

$$\boxed{S \text{ est la réunion de deux plans perpendiculaires.}}$$

2) **a)** Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a+2b+2c=0 \\ 2a+b-2c=0 \\ -2a+2b-c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+2b+2c=0 \\ -3b-6c=0 \\ -9c=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

Donc la famille $\mathscr{C}$ est libre, or elle est de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3, par conséquent

$$\boxed{\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

On pouvait aussi calculer le déterminant $\det(e_1,e_2,e_3) = \det\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right) = 1 \neq 0$, *donc la famille est une base.*

b) $e_1.e_2 = \dfrac{1}{9}(2+2-4) = 0$ et de même $e_1.e_3 = e_2.e_3 = 0$.

De plus, $\|e_1\| = \dfrac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$, et de même $\|e_2\| = \|e_3\| = 1$.

Ainsi, $\boxed{\text{Cette base est orthonormée}}$

On effectue les calculs : $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2\times 9 \\ -2\times 9 \end{pmatrix}$. En conclusion,

$$\boxed{f(e_1) = 0 \quad , \quad f(e_2) = 0 \quad \text{et} \quad f(e_3) = \frac{1}{3}(1,2,-2) = e_1}$$

c) Par définition de la matrice d'une application linéaire dans une base, la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$ est $\text{Mat}(f, \mathscr{C}, \mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$.

Or f a pour matrice A dans la base canonique, donc, en notant $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{C}$, on a

$$A = PUP^{-1}$$

Donc $\boxed{A \text{ est semblable à la matrice } U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

De plus, d'après 2)b), les vecteurs colonnes de P forment une base orthonormée. Par conséquent $\boxed{\text{La matrice } P \text{ est orthogonale}}$

d) $\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \,\text{id}\,) = \det(U - \lambda I_3) = -\lambda^3$ nous montre que 0 est la seule valeur propre.
Si A était diagonalisable, elle serait donc semblable à la matrice nulle, donc devrait déjà être égale à la matrice nulle. Or $A \neq 0$.
Finalement, $\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable}}$

e) **i)** $\boxed{X_M = PX'_M}$

ii) En utilisant la formule de changement de base ci-dessus, il vient ${}^tX_M A X_M = {}^tX'_M {}^tPAPX'_M$.
Or P est une matrice orthogonale, donc ${}^tP = P^{-1}$. Ainsi ${}^tPAP = P^{-1}AP = U$.

$$M \in S \iff {}^tX_M A X_M = {}^tX'_M U X'_M 0 \iff x'z' = 0$$

Donc S est la réunion des plans $(Oy'z')$ et $(Ox'y')$, qui donc perpendiculaire car la base $\mathscr{C}$ est orthogonale.

3) **a)** Comme $\text{rg } f = \text{rg } U$ et que $\text{Im } U = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boxed{\text{rg } f = 1}$

De même, on se place dans $\mathscr{C}$ et comme $U^2 = 0$, $\boxed{f \circ f = 0}$

b) Si v a pour coordonnées (x, y, z) dans la base canonique, alors $f(v)$ a pour coordonnées

$$AX_M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2x - 2y - z \\ 2(2x - 2y - z) \\ -2(2x - 2y - z) \end{pmatrix} = \frac{2x - 2y - z}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc $f(v) = \dfrac{2x - 2y - z}{3} e_1$. On peut donc prendre par exemple : $\boxed{c = \frac{1}{3}e_1}$ et $\boxed{\varphi(v) = 2x - 2y - z}$

Partie 2

On considère les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme

$$u_0 = -1 \qquad v_0 = 2 \qquad w_0 = -1$$

et par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & -\dfrac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ u_{n+1} & = & -\dfrac{1}{2}(u_n + w_n) \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{4}(u_n - v_n - w_n) \end{array} \right.$$

1) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} + 2w_{n+1} = -\frac{1}{2}(v_n + 2w_n)$.

La suite $(v_n + 2w_n)$ est donc une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 + 2w_0 = 0$.

Par conséquent, $\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad v_n + 2w_n = 0}$

b) $u_{n+1} + 3w_{n+1} = -\frac{1}{2}(v_n + 2w_n) = 0$. Ainsi $\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad u_n + 3w_n = 0}$

c) On déduit de a) et b) que pour tout $n \geqslant 1$: $w_{n+1} = \frac{1}{4}(-3w_n + 2w_n - w_n) = -\frac{1}{2}w_n$. La suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_1 = \frac{1}{4}(-1-2+1) = -\frac{1}{2}$. On en déduit pour $n \geqslant 1$: $\boxed{w_n = w_1\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n}$.

D'après a) et b), $\boxed{v_n = -2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n}$ et $\boxed{u_n = -3\Big(-\frac{1}{2}\Big)^n}$.

Les trois suites convergent donc vers 0.

2) **a)** La définition des trois suites donne : $\boxed{M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

b) Diagonalisons M :

$$\chi_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \det(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3-4\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -4\lambda & -2 \\ 1 & -1 & -1-4\lambda \end{pmatrix}) = \frac{1}{4^3}\begin{vmatrix} -3-4\lambda & -4\lambda-2 & 4\lambda+2 \\ -2 & -4\lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & -4\lambda-2 \end{vmatrix}$$

par les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$. Par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + L_3$ on obtient

$$\chi_M(\lambda) = \frac{1}{64}\begin{vmatrix} -4\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -4\lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & -4\lambda-2 \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{16}(4\lambda+2)^2$$

Les valeurs propres de M sont 0 (simple) et $-\frac{1}{2}$ (double).

- $\underline{\lambda = -\frac{1}{2}}$: $X \in E_{-\frac{1}{2}} = \mathrm{Ker}\,(M + \frac{1}{2}I_3) \Longleftrightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \Longleftrightarrow x - y + z = 0$

  Le sous-espace propre associé à $-\frac{1}{2}$ est de dimension 2 et a pour base $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,-1)$.

- $\underline{\lambda = 0}$: $X \in E_0 = \mathrm{Ker}\,(M) \Longleftrightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \Longleftrightarrow z = -x \quad \text{et} \quad y = 2x$

  Le sous-espace propre associé à 0 est de dimension 1 et a pour base $u_3 = (1,2,-1)$.

M est donc diagonalisable, semblable à $\boxed{D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$, avec une matrice de passage égale à $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

c) On en déduit $X_n = M^n X_0 = PD^nP^{-1}X_0$ d'où $Y_n = P^{-1}X_n = D^nY_0$.

Si $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $Y_n = \begin{pmatrix} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n & 0 & 0 \\ 0 & \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} (-\frac{1}{2})^n a \\ (-\frac{1}{2})^n b \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par suite Y_n a pour limite le vecteur nul, X_n aussi (par continuité de $X \mapsto P^{-1}X$) et on retrouve que $\boxed{\text{Les suites } (u_n), (v_n), (w_n) \text{ convergent vers } 0}$

Partie 3

1) L'application f est linéaire car u l'est. Elle est à valeurs dans E car $u(x) \in \mathbb{R}$ et $a \in E$ donc $f(x) = u(x)a \in E$. Ainsi, $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$

Par construction $\text{Im } f \subset \text{Vect } a$, donc $\text{Im } f$, sous-espace vectoriel de E, est égal à $\text{Vect } a$ ou à $\{0\}$. Or $u \neq 0$ donc $f \neq 0$. Par conséquent $\text{Im } f = \text{Vect } a$ et $\boxed{\text{rg } f = 1}$.

2) **a)** D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f = \dim E - \text{rg } f = n - 1$. Or $n \geqslant 2$, donc $\dim \text{Ker } f \geqslant 1$ et $E_0 = \text{Ker } f \neq \{0\}$: $\boxed{0 \text{ est valeur propre}}$

Comme $a \neq 0$, $x \in E_0 \iff f(x) = u(x)a = 0 \iff u(x) = 0 \iff x \in \text{Ker } u$.

Donc $\boxed{E_0 = \text{Ker } u}$.

b) Par définition, $f(x) = \lambda x = u(x)a$ donc, comme $\lambda \neq 0$, $x = \dfrac{u(x)}{\lambda}a$ et $\boxed{x \text{ est colinéaire à } a}$

Ainsi, $x = \alpha a$ donc $f(x) = \lambda x = \alpha f(a) = \alpha u(a)a = u(a)x$

D'où, puisque $x \neq 0$, $\lambda x = u(a)x$ entraîne $\boxed{\lambda = u(a)}$

c) On vient de montrer que les seules valeurs propres possibles sont 0 et $u(a)$.

Premier cas : $\underline{u(a) = 0}$: f a pour seule valeur propre 0, le sous-espace propre associé est $\text{Ker } u$ de dimension $n - 1$. $\boxed{f \text{ n'est donc pas diagonalisable.}}$

Deuxième cas : $\underline{u(a) \neq 0}$. f a deux valeurs propre, 0 et $u(a)$. Le sous-espace propre associé à 0 est $\text{Ker } u$ de dimension $n - 1$, celui associé à $u(a)$ est $\text{Vect}\,(a)$ de dimension (au moins) 1. $\boxed{f \text{ est donc diagonalisable.}}$

d) D'après la question précédente, $\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } u(a) \neq 0.}$

3) $\text{Im } g = \text{Vect } b$ avec $b \neq 0$. On peut donc définir une application v de E dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = v(x)b$. Montrons que v est linéaire.

D'une part, $g(\lambda x + \mu y) = v(\lambda x + \mu y)b$.

D'autre part, $g(\lambda x + \mu y) = \lambda g(x) + \mu g(y) = (\lambda v(x) + \mu v(y))b$. Puisque $b \neq 0$ on déduit que

$$v(\lambda x + \mu y) = \lambda v(x) + \mu v(y)$$

Conclusion : $\boxed{v \text{ est une forme linéaire non nulle}}$ (sinon on aurait $g = 0$).

4) Pour tout $x \in E$, $g^2(x) = v(x)g(b) = v(x)v(b)b$. Si $v(b) = 0$, alors $g^2 = 0$. Or $g^2 \neq 0$, donc $v(b) \neq 0$.

En utilisant le résultat du 2.(c) on déduit que $\boxed{g \text{ est diagonalisable}}$ de valeurs propres 0 (d'ordre $n-1$) et $v(b)$ d'ordre 1. On obtient la matrice diagonale demandée avec $\boxed{\alpha = v(b)}$.

5) **a)** On peut compléter une famille libre de E par des vecteurs de E pour obtenir une base de E.

b) Le vecteur $g(e_n)$ est non nul et appartient à $\text{Ker}\,(g)$ puisque $g^2 = 0$. Il forme donc une famille libre que l'on peut compléter par des vecteurs $e_2, ..., e_{n-1}$ de $\text{Ker}\,(g)$ pour obtenir une base de $\text{Ker}\,(g)$ (par le théorème de la base incomplète).

c) Puisque le vecteur e_n n'est pas dans l'hyperplan $\text{Ker}\,(g)$, la famille $B = (g(e_n), e_2, ..., e_n)$ est une famille libre possédant n vecteurs ; c'est donc une base de E. La matrice de g dans cette base est bien celle qui est proposée.

6) Si deux matrices sont semblables alors elles ont la même trace.

Réciproquement, supposons que A et B sont de rang 1 et ont même trace.

Supposons que $\text{Tr } A = \text{Tr } B \neq 0$. Si $A^2 = 0$, alors A est semblable à la matrice $E_{1,n}$ trouvée au 5)c), qui est de trace nulle. Donc A devrait être de trace nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc $A^2 \neq 0$. De même $B^2 \neq 0$. Donc elles sont semblables, d'après 4), à des matrices diagonales de la forme $D_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$ et $D_\beta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \beta \end{pmatrix}$. Donc $\alpha = \text{Tr } A = \text{Tr } B = \beta$.

Comme $A = PD_\alpha P^{-1}$ et $B = QD_\alpha Q^{-1}$, $A = (PQ^{-1})B(PQ^{-1})^{-1}$ et A et B sont semblables.
Supposons que $\mathrm{Tr}\ A = \mathrm{Tr}\ B = 0$. Alors A et B sont semblables à $E_{1,n}$ d'après 5)c), donc semblables entre elles.

Finalement, $\boxed{\text{Deux matrices carrées de rang 1 de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ sont semblables si et seulement si elles ont même trace.}}$

Partie 4 (corrigé UPS)

1) Si $h(x) = 0$ alors $x = \dfrac{u(x)}{u(a)}a \in \mathrm{Vect}\,(a)$ (on a supposé $u(a) \neq 0$). Donc $\mathrm{Ker}\,(h) \subset \mathrm{Vect}\,(a)$.
De $h(a) = 0$ on déduit que $\mathrm{Vect}\,(a) \subset \mathrm{Ker}\,(h)$. On a donc bien $\mathrm{Ker}\,(h) = \mathrm{Vect}\,(a)$.
On calcule $u(h(x)) = u(a)u(x) - u(x)u(a) = 0$. Donc $\mathrm{Im}\,(h) \subset \mathrm{Ker}\,(u)$. Réciproquement, si $u(x) = 0$ alors $h(x) = u(a)x$ d'où $x = \dfrac{1}{u(a)}h(x) \in \mathrm{Im}\,(h)$. On a donc bien montré que $\mathrm{Im}\,(h) = \mathrm{Ker}\,(u)$.

2) $h(x) = x \iff (u(a) - \ )x = u(x)a$.
Si $\ = u(a)$ on obtient $u(x) = 0$: $\ = u(a)$ est donc valeur propre de sous-espace propre associé égal à $\mathrm{Ker}\,(u)$.
Si $\ \neq u(a)$ on obtient que x est colinéaire à a ; comme $h(a) = 0$, 0 est valeur propre de sous-espace propre associé égal à $\mathrm{Vect}\,(a)$.

3) Si E est de dimension finie n, h est diagonalisable puisque la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $n - 1 + 1 = n$, dimension de E.

4) Montrons par récurrence sur $p \geq 1$ la propriété $P(p)$: $h^p(x) = (u(a))^{p-1}h(x)$.
$P(1)$ est vérifiée car $(u(a))^0 = 1$.
Supposons $P(p)$ vraie. $h^{p+1}(x) = h(h^p(x)) = (u(a))^{p-1}h^2(x)$. Or $h^2(x) = u(a)h(x)$ puisque $h(a) = 0$. On en déduit $h^{p+1}(x) = (u(a))^p h(x)$. Donc $P(p+1)$ est vraie.

5) $||h^p(x)|| = |u(a)|^{p-1}||h(x)||$ a pour limite 0 quand p tend vers l'infini puisque $|u(a)| < 1$.

6) **a)** Nous allons appliquer le résultat du 5) en prenant $E = \mathbb{R}^3$, pour u la forme linéaire définie par $u(x, y, z) = (x - y + z)$ et $a = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.
On obtient $u(a) = -\dfrac{1}{2}$ donc on a donc bien $|u(a)| < 1$. L'application h est définie par $h(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x, y, z) - (x - y + z)a = (-\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z, \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}z)$. On a donc $(u_{p+1}, v_{p+1}, w_{p+1}) = h(u_p, v_p, w_p)$ et par suite $(u_p, v_p, w_p) = h^p(u_0, v_0, w_0)$ a sa norme qui tend vers 0 quand p tend vers l'infini. On retrouve bien que les suites (u_n), (v_n) et (w_n) convergent vers 0.

b) Appliquons à nouveau le résultat du 5) en prenant pour E l'ensemble des applications continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $||f||_\infty = \sup\limits_{t \in [0,\pi]} |f(t)|$, pour u la forme linéaire sur E définie par $u(f) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)dt$ et pour a la fonction définie par $a(t) = \sin(3t)$.
On obtient $u(a) = \displaystyle\int_0^\pi \sin(3t)dt = -\frac{1}{3}(\cos(3\pi) - \cos(0)) = \frac{2}{3}$; on a donc bien $|u(a)| < 1$. En posant $h(f) = u(a)f - u(f)a$ on obtient $f_{p+1} = h(f_p)$, donc $f_p = h^p(f_0)$ a sa norme qui tend vers 0, donc pour tout $t \in [0, \pi]$, $f_p(t)$ tend vers 0 quand p tend vers l'infini.