

Devoir de Mathématiques numéro 4

Exercice 1

Ce problème a pour objet l'étude d'endomorphismes sur des espaces vectoriels réels construits à l'aide de formes linéaires. On rappelle qu'une forme linéaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel et tout entier $p \geqslant 1$, on note f^p l'endomorphisme composé $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.
Les deux premières parties sont consacrées à deux exemples et les deux suivantes à une étude théorique de tels endomorphismes. Les quatre parties de ce problème sont largement indépendantes entre elles.
L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique et d'un repère orthonormé $R = (0, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$. À tout point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans R, on associe le vecteur colonne

$$X_M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Partie 1

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ainsi que la surface

$$S = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid {}^tX_M A X_M = 0\}$$

On notera f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A.

1) Vérifier qu'une équation de S dans R est

$$(2x - 2y - z)(x + 2y - 2z) = 0$$

et en déduire que S est la réunion de deux plans perpendiculaires.

2) On se propose dans cette question de retrouver la nature de S par une autre approche. On considère les vecteurs

$$e_1 = \frac{1}{3}(1, 2, -2) \qquad e_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2) \qquad e_3 = \frac{1}{3}(2, -2, -1)$$

a) Vérifier que $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que cette base est orthonormée (les (e_i) sont orthogonaux deux à deux et de norme 1). Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

c) En déduire que A est semblable à la matrice

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et justifier qu'il existe une matrice orthogonale P (i.e. telle que ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée), que l'on précisera, telle que $A = PUP^{-1}$.

d) La matrice est-elle diagonalisable ?

e) Soit $M \in \mathbb{R}^3$ un point de l'espace. On note X'_M le vecteur colonne de ses coordonnées dans le repère $R' = (O, \mathscr{C})$.

i) Écrire X_M en fonction de P et X'_M.

ii) En déduire qu'un point M de coordonnées (x', y', z') dans R' appartient à S si et seulement si $x'z' = 0$ et retrouver la nature géométrique de S.

3) **a)** Déterminer le rang de f et calculer $f \circ f$.

b) Déterminer une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ et un vecteur $c \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 \qquad f(v) = \varphi(v)c$$

Partie 2

On considère les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme

$$u_0 = -1 \qquad v_0 = 2 \qquad w_0 = -1$$

et par les relations de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & -\frac{1}{4}(3u_n - v_n + w_n) \\ v_{n+1} & = & -\frac{1}{2}(u_n + w_n) \\ w_{n+1} & = & \frac{1}{4}(u_n - v_n - w_n) \end{array} \right.$$

1) **a)** Exprimer $v_{n+1} + 2w_{n+1}$ en fonction de $v_n + 2w_n$ et en déduire que $v_n = -2w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que $u_n = -3w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire, pour $n \geqslant 1$, les expression de w_n, u_n et v_n en fonction de n uniquement puis prouver la convergence de ces trois suites.

2) On se propose dans cette question de retrouver les limites de ces suites par une autre approche.

a) Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle qu'en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, on ait

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X_{n+1} = MX_n$$

b) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$ et préciser D et P.

c) Retrouver les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) en posant $Y_n = P^{-1}X_n$.

Partie 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. On fixe un vecteur a non nul de E ainsi qu'une forme linéaire u sur E qui n'est pas la forme linéaire nulle. On considère enfin l'application f définie sur E par

$$\forall x \in E \qquad f(x) = u(x)a$$

1) Vérifier que f est un endomorphisme de E et préciser son rang.

2) **a)** Vérifier que 0 est une valeur propre de f et exprimer son sous-espace propre associé à l'aide de $\operatorname{Ker} u$.

b) On suppose que λ est une valeur propre non nulle de f et que x est un vecteur propre associé. Montrer que x est colinéaire à a et que $\lambda = u(a)$.

c) En déduire, en distinguant les cas $u(a) = 0$ et $u(a) \neq 0$, toutes les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

d) Énoncer une condition nécessaire et suffisante portant sur $u(a)$ pour que f soit diagonalisable.

On considère à présent un endomorphisme g de E de rang 1.

3) Démontrer qu'il existe un vecteur non nul b et une forme linéaire v sur E qui n'est pas la forme linéaire nulle, tels que

$$\forall x \in E \qquad g(x) = v(x)b$$

4) On suppose que $g^2 \neq 0$. Montrer que g est diagonalisable et qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ et une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice la matrice diagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \alpha \end{pmatrix}$$

5) On suppose que $g^2 = 0$ et on considère un vecteur e_n tel que $g(e_n) \neq 0$.

a) Énoncer le théorème de la base incomplète.

b) Justifier l'existence de vecteurs $e_2, \ldots, e_{n-1}$ tels que $(g(e_n), e_2, \ldots, e_{n-1})$ soit une base de Ker g.

c) En déduire l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle g a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

6) Déduire des questions 4 et 5 que les deux matrices carrées de rang 1 de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Partie 4

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension infinie ou de dimension finie $n \geqslant 2$. On fixe un vecteur a non nul de E ainsi qu'une forme linéaire u sur E. On considère l'application h définie sur E par

$$\forall x \in E, \qquad h(x) = u(a)x - u(x)a$$

et on supposera $u(a) \neq 0$.

1) Démontrer que Ker h est la droite vectorielle dirigée par a puis démontrer que Im h = Ker u.

2) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de h.

3) On suppose, dans cette question seulement, que E est de dimension finie $n \geqslant 2$: l'endomorphisme h est-il diagonalisable ?

4) Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in E$,

$$h^p(x) = (u(a))^{p-1} h(x)$$

5) (pour 5/2) L'espace vectoriel E est muni d'une norme $\|.\|$ et l'on suppose que $|u(a)| < 1$. Montrer que

$$\|h^p(x)\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

6) Applications.

a) En considérant le vecteur $a = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ et la forme linéaire $u : (x, y, z) \mapsto x - y + z$, retrouver les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) de la partie 2.

b) Soit f une fonction définie et continue sur $[0, \pi]$, à valeurs réelles. On considère la suite de fonctions (f_p) définie par $f_0 = f$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$ par

$$\forall t \in [0, \pi] \qquad f_{p+1}(t) = \frac{2}{3} f_p(t) - \sin 3t \int_0^\pi f_p(s)\, \mathrm{d}s$$

Démontrer que pour $t \in [0, \pi]$, $f_p(t) \to 0$ lorsque $p \to +\infty$. (On admettra que $\|g\| = \sup\limits_{[0,\pi]} |g|$ est une norme).