

Devoir de Mathématiques numéro 4

Correction

Exercice 1 (PT B 2010 partie C / E3A PSI 2011)

1) a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = tx(t)$. Donc $\boxed{\text{Le paramètre } t \text{ représente la pente de la droite } (OM(t)).}$

b) Le changement de t en $-t$ change (x, y) en $(x, -y)$. Par conséquent Γ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

c) Les fonctions x et y sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, car les dénominateurs des fractions rationnelles ne s'annulent pas. On restreint l'étude à $[0, +\infty[$.

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x'(t) = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} \qquad \text{et} \qquad y'(t) = \frac{1-4t^2-t^4}{(1+t^2)^2}$$

Le numérateur de $y'(t)$ est bicarré et se factorise en

$$1 - 4t^2 - t^4 = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t^2 + 2 - \sqrt{5}) = -(t^2 + 2 + \sqrt{5})(t - t_0)(t + t_0)$$

où $\boxed{t_0 = \sqrt{\sqrt{5} - 2}}$. Le tableau de variation est donc le suivant :

- $$x(t_0) = \frac{1 - (\sqrt{5} - 2)}{1 + \sqrt{5} - 2} = \frac{(3 - \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})}{5 - 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$
- $y(t_0) = t_0 x(t_0)$

t	0		t_0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$-$		$-$	
x	1	$\searrow$			-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$y(t_0)$	$\searrow$	$-\infty$

d) Lorsque t tend vers $+\infty$, y tend vers $-\infty$ et x tends vers -1. C'est la seule limite infinie. Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } x = -1 \text{ est asymptote à } \Gamma \text{ pour } y \to \pm\infty.}$

e) Tous les points sont réguliers, donc la tangente est horizontale lorsque $y'(t) = 0$, c'est-à-dire $t = \pm t_0$, ce qui correspond au point de coordonnées $\boxed{(x(t_0), y(t_0))}$ et à son symétrique par rapport à (Ox).

De même, la tangente est verticale pour $x'(t) = 0$, c'est-à-dire $t = 0$, qui correspond à $\boxed{(1, 0)}$.

f) On cherche t_1 et t_2 tels que $t_1 \neq t_2$, $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$. Si on complète le tableau de variations de x, on constate que $x(t_1) = x(t_2)$ implique $t_2 = -t_1$ (et $t_1 \neq t_2$ équivaut à $t_1 \neq 0$). Cherchons $t_1 > 0$ tel que $y(t_1) = y(-t_1)$, c'est-à-dire

$$y(t_1) = \frac{t_1 - t_1^3}{1 + t_1^2} = \frac{-t_1 + t_1^3}{1 + t_1^2} = y(-t_1)$$

Ainsi, en résolvant, $2t_1(1 - t_1^2) = 2t_1(1 - t_1)(1 + t_1) = 0$, c'est-à-dire $t_1 = 1$.

La courbe Γ possède un unique $\boxed{\text{point double en } (0, 0).}$

g) D'après 1)c), $\begin{cases} x'(1) = -\dfrac{4}{2^2} = -1 \\ y'(1) = \dfrac{1-4-1}{2^2} = -1 \end{cases}$ et par symétrie $\begin{cases} x'(-1) = 1 \\ y'(-1) = -1 \end{cases}$

Comme le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul, donc les tangentes à Γ au point double forment $\boxed{\text{un angle droit.}}$

h) Tracer Γ.

2) Raisonnons par double inclusion.

Si $M(x,y) \in \Gamma$, alors $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t-t^3}{1+t^2}$, donc $y = tx$. En particulier, lorsque $x \neq 0$, $t = \dfrac{y}{x}$. En remplaçant dans l'expression de x on obtient $x = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, puis en multipliant par x^2+y^2 il vient

$$(E) \qquad \boxed{x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 = 0}$$

On avait exclu les points d'abscisse nulle, c'est-à-dire le point $(0,0)$, or $(x,y) = (0,0)$ vérifie bien (E). On a donc $\Gamma \subset \Gamma_{(E)}$.

Réciproquement, soit $M(x,y)$ dont les coordonnées vérifient (E). Pour $x \neq 0$, posons $t = \dfrac{y}{x}$.

Comme (E) équivaut à $x = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, on trouve

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad y = tx = \frac{t-t^3}{1+t^2}$$

c'est-à-dire $M \in \Gamma$. De plus $x = 0$ implique $y = 0$, d'après (E) ; qui est dans Γ (par exemple pour $t = 1$). Ainsi $\Gamma_{(E)} \subset \Gamma$.

Conclusion : par double inclusion, $(E) : x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 = 0$ est une équation cartésienne de Γ.

(remarque : une telle équation de degré 3 définit une courbe dite cubique, qui sont des courbes fort intéressantes)

3) En coordonnées polaire, on a $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$. De plus, $M(x,y) \in \Gamma$ si (x,y) vérifie l'équation (E) trouvée précédemment. Donc il vient

$$M(\rho,\theta) \in \Gamma \iff \rho^3\cos\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - \rho^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

Pour $\rho \neq 0$, on trouve donc $\boxed{\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}}$ (et on n'a pas perdu le cas $\rho = 0$, qui correspond à $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ par exemple).

On cherche une expression de ρ en fonction de θ telle que $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$. Si on a une équation cartésienne, on injecte les expression de x et de y et on cherche à résoudre en ρ – ce qui n'a pas de raison de donner une solution unique, ou même des solutions un peu propre, en général. Mais si on vous le demande, c'est que ça doit se résoudre... Si on a une expression paramétrique, on peut regarder $\rho^2 = x^2 + y^2$ et en déduire $\rho(t)$, puis $\tan\theta(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)}$ (par exemple). Dans les bons cas, on peut espérer obtenir une expression en $\rho(\theta)$. Suivre les indications de l'énoncé.

4) Formule pour calculer une aire en polaire (5/2), les extrémités de la boucle correspondants à $\theta = \pm\dfrac{\pi}{4}$:

$$\mathscr{A} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{2t}{1+t^2} - 2\operatorname{Arctan} t + t\right]_0^1 = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}$$

(Règles de Bioche, changement en $t = \tan\theta$.)

5) **a)** Les coordonnées de $M \in \Gamma$ vérifient $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $y = \dfrac{t-t^3}{1+t^2}$. L'équation de Δ s'écrit donc

$$u\frac{1-t^2}{1+t^2} + v\frac{t-t^3}{1+t^2} + w = 0$$

En multipliant par $-(1+t^2) \neq 0$ il vient $\boxed{vt^3 + (u-w)t^2 - vt - (u+w) = 0}$

b) On utilise les relations entre coefficients et racines. Id est, si on développe le membre de droite (avec les racines) et qu'on identifie les coefficients de chaque coté, on obtient

$$\begin{cases} v &= v & \text{(coefficient devant } t^3) \\ u-w &= -v(t_1+t_2+t_3) & \text{(coefficient devant } t^2) \\ -v &= v(t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1) & \text{(coefficient devant } t^1 = t) \\ -(u+w) &= -vt_1t_2t_3 & \text{(coefficient devant } t^0 = 1) \end{cases}$$

Donc lorsque $v \neq 0$, il vient $\boxed{t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-1}$

c) Trois points sont alignés si et seulement si ils sont sur une même droite, c'est-à-dire, s'ils vérifient une même équation $ux+vy+w=0$. Supposons ces points sur Γ.

D'après le tableau de variations, la droite ne peut être verticale, donc $v \neq 0$. D'après 5)a) et 5)b), dans ce cas, $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-1$.

Réciproquement, supposons que $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-1$. Considérons la droite $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$, et notons $ux+vy+w=0$ son équation.

Par définition, $M(t_1) \in \Delta$ et $M(t_2) \in \Delta$, donc t_1 et t_2 sont des racines de l'équation trouvée au 5)a). En notant τ la troisième racine (nécessairement réelle puisque les deux précédentes le sont), le 5)b) nous dit que $t_1t_2+t_2\tau+\tau t_1=-1$. Par construction, $M(\tau)$ est sur $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$.

Il nous reste à prouver que le point $M(\tau)$ est confondu avec $M(t_3)$. La différence des deux équations

$$t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-1 \qquad \text{et} \qquad t_1t_2+t_2\tau+\tau t_1=-1$$

nous donne $(t_3-\tau)(t_1+t_2)=0$. Si $t_1=-t_2$, alors $M(t_1)$ est le symétrique de $M(t_2)$ par rapport à (Ox), et la droite $\Delta = (M(t_1)M(t_2))$ est verticale, ce qui est exclu. Donc la seule possibilité est que $\tau = t_3$, et donc $M(t_3) \in \Delta = (M(t_1)M(t_2))$.

Conclusion : $\boxed{t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-1}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3 soient alignés.

6) **a)** $x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 1$ entraîne $1-t^2 = 1+t^2$ puis $t=0$. Donc $\boxed{A \text{ est de paramètre } t=0.}$

b) D'après 5)b), $t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=-1$, avec $t_3=0$, donc $\boxed{t_1t_2=-1}$

c) D'après 1)a), la droite (OM_1) a pour pente t_1 et la droite (OM_2) pour pente t_2. Or d'après 6)b), $t_1t_2=-1$. Donc $\boxed{\text{les droites } (OM_1) \text{ et } (OM_2) \text{ sont perpendiculaires}}$

d) Le triangle OM_1M_2 est rectangle en O, donc O est sur le cercle de diamètre $[M_1M_2]$. Il reste à montrer que l'axe (Ox) est tangent.

Si on note Ω le centre du cercle, milieu du segment $[M_1M_2]$, l'axe (Ox) est tangent si (Ox) est perpendiculaire à (ΩO), c'est à dire si $\Omega \in (Oy)$. La condition analytique est donc $x(t_1)+x(t_2)=0$, elle s'écrit $t_1^2t_2^2=1$ après calculs. Ce qui est vrai d'après 6)b).

Ainsi, $\boxed{\text{Le cercle de diamètre } [M_1M_2] \text{ est tangent à l'axe } (Ox).}$

7) **a)** La droite Δ passe par $S(t_0)$ et $M(t)$ (point double : elle y est tangente à Γ) si et seulement si $2t_0t+t^2=-1$ (5)c)). L'équation cherchée est donc

$$\boxed{t^2+2t_0t+1=0}$$

Cette équation a deux solutions réelles distinctes si et seulement si $\Delta = 4t_0^2-4>0$ c'est-à-dire

$$\boxed{t_0 \notin [-1,1]}$$

Donc pour S hors de la boucle.

b) Le point $P(t)$ vérifie, d'après 5)b), $t't''+tt'+tt''=-1$. Or t' et t'' sont les racines de $t^2+2t_0t+1=0$: leur somme vaut $-2t_0$ et leur produit 1. Ainsi, en remplaçant, il vient

$$1-2t_0t=-1$$

En résolvant, on trouve $\boxed{t=1/t_0}$.

c) D'après 7)a), on vu que $t't''=1$ donc $t''=1/t'$. Ainsi $x(t'')=-x(t')$ et $y(t'')=t''x(t'')=-t''x(t')$.
La droite $(M'M'')$ a pour pente $\dfrac{y(t'')-y(t')}{x(t'')-x(t')}=\dfrac{-t''-t'}{-2}=\dfrac{1}{2}(t''+t')=-t_0$ d'après les relations coefficients racines.
Or, d'après 1)a) et 7)b), la droite $(OM(t))$ a pour pente $t=1/t_0$.
Conclusion : $\boxed{\text{Les droites } (OP) \text{ et } (M'M'') \text{ sont perpendiculaires.}}$

Exercice 2 (CAPES 2011 partie 1)

1) Étant donné un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère les points

$$I(1,0) \quad , \quad J\Big(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) \quad \text{et} \quad K\Big(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

a) L'étude des coniques à partir d'une forme quadratique montre que, lorsque $\mathscr{E}$ est une conique bornée, a et b sont non nuls (les deux valeurs propres de la matrices doivent être de même signe, donc le déterminant >0).
L'ellipse $\mathscr{E}$ a pour centre O, donc si $M(x,y)\in\mathscr{E}$, alors $M'(-x,-y)\in\mathscr{E}$. Ainsi, en remplaçant les coordonnées de M' dans l'équation, il vient

$$\forall M(x,y)\in\mathscr{E} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} ax^2+by^2+2cxy+dx+ey+f &=& 0\\ ax^2+by^2+2cxy-dx-ey+f &=& 0\end{array}\right. \Longrightarrow dx+ey=0$$

L'étude des ellipses montre que les axes rencontrent l'ellipse (ailleurs qu'en O). Soit $(0,y_0)$ et $(x_0,0)$ deux point de l'ellipse. Comme $x_0\neq 0$ et $y_0\neq 0$, on trouve $\boxed{d=e=0}$

b) On injecte les coordonnée de I, J et K dans l'équation de l'ellipse $ax^2+by^2+2cxy+f=0$, ce qui nous donne un système de 3 équations linéaires à 4 inconnues (qui a donc forcément une solution). La résolution nous donne $c=0$, $a=b=-f$, donc finalement (puisque $a\neq 0$) l'équation de $\mathscr{E}$ est $x^2+y^2=1$, le cercle circonscrit au triangle IJK. Réciproquement, celui-ci convient.
$\boxed{\text{Le cercle circonscrit à } IJK \text{ est l'unique ellipse de centre } O \text{ contenant les points } I,\ J \text{ et } K.}$

2) Médianes, médiatrices et hauteurs étant confondues, le centre du cercle circonscrit est aussi le centre de gravité, intersection des médianes, et donc à 2/3 de la longueur de celles-ci : $h=\dfrac{3}{2}R$.
De plus la longueur b d'un coté vérifie $\dfrac{b^2}{4}+h^2=b^3$, donc $b^2=\dfrac{4}{3}h^2=3R^2$, puis

$$\boxed{\mathscr{A}_{ABC}=\frac{bh}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2}$$

3) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ telle que $0<x<y<2\pi$ et que $\left\{\begin{array}{l}\cos(y-x)=\cos(x)\\ \cos(y-x)=\cos(y)\end{array}\right.$
Ainsi, $\cos x=\cos y$, donc $x=\pm y\,[2\pi]$. Or $0<x<y<2\pi$, donc $x\in]0,\pi[$ et $y=2\pi-x$.
En remplaçant dans la première équation puis en développant le $\cos 2x$, il vient,

$$(1)\Leftrightarrow \cos(2x)=\cos(x)\Leftrightarrow 2\cos^2(x)+\cos(x)-1=0$$

Cette équation du second degré en $\cos x$ a pour solutions $\cos x=\dfrac{1\pm 3}{2}$. Donc, comme $x\in]0,\pi[$, $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ et $\boxed{x=\dfrac{2\pi}{3}}$, puis $\boxed{y=\dfrac{4\pi}{3}}$.
Réciproquement, ces deux valeurs conviennent.

4) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon $R>0$. On note O son centre.

a) i)

$$\begin{array}{rcl} f(\beta,\gamma) &=& \dfrac{1}{2}\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{R^2}{2}((\cos\beta-1)\sin\gamma-\sin\beta(\cos\gamma-1))\\ &=& \boxed{\dfrac{R^2}{2}(\sin(\gamma-\beta)-\sin(\gamma)+\sin(\beta))} \quad (\geqslant 0)\end{array}$$

ii) On cherche le maximum de f sur $D = \{(\beta, \gamma) \in [0, 2\pi] \mid \beta \leqslant \gamma\}$. Or sur les bords de D, f est nulle (ce qui est logique : le triangle est plat), donc on se place sur $\Omega = \{(\beta, \gamma) \in]0, 2\pi[\mid \beta < \gamma\}$, l'intérieur de D.

Cherchons les points critiques :

(5/2) Montrer que f admet un maximum atteint en un point (β_0, γ_0) tel que $0 < \beta_0 < \gamma_0 < 2\pi$.

b) (5/2) Montrer que l'aire maximale d'un triangle inscrit dans $\mathscr{C}$, que l'on calculera, est celle d'un triangle équilatéral.

5) Démontrer que si $\mathscr{C}$ est un cercle d'aire $\mathscr{A}_{\mathscr{C}}$ circonscrit à un triangle $\mathcal{T}$ d'aire $\mathscr{A}_{\mathcal{T}}$, alors $\dfrac{\mathscr{A}_{\mathscr{C}}}{\mathscr{A}_{\mathcal{T}}} \geqslant \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.

6) Montrer que parmi les ellipses circonscrites au triangle IJK défini dans la question 1, il en existe une et une seule délimitant une surface d'aire minimale. Indication : *Utiliser une affinité orthogonale.*

Exercice 21 (Feuille d'exercices sur la réduction)