Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1 (EDHEC 2013)

1) Par des calculs matriciels, $U^2 = -I_2$, $V \neq I_2$ et $(V-I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$. De plus $U+V-I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(U+V-I_n) \Longleftrightarrow (U+V-I_n)X = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker}(U+V-I_n) = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \neq \{0\}$.

Donc $\boxed{\text{Les endomorphismes } u \text{ et } v \text{ de matrices respectives } U \text{ et } V \text{ sont des solutions du problème posé}}$

2) **a)** D'après (A_1), $(\det u)^2 = \det(u^2) = \det(-\operatorname{id}) = 1$, donc $\det u \neq 0$: u est inversible.
Comme $u^4 = u \circ u^3 = \operatorname{id}$, $u^{-1} = u^3$.
D'après (A_3), $v^2 - 2v + \operatorname{id} = 0$ (v et id commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme).
Ainsi $-v^2 + 2v = \operatorname{id}$, ce qui peut s'écrire

$$v(-v + 2\operatorname{id}) = (-v + 2\operatorname{id})v = \operatorname{id}$$

Donc v est inversible, d'inverse $-v + 2\operatorname{id}$. *(Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $P(f) = 0$ avec $P(0) = a_0 \neq 0$, on peut effectuer ce raisonnement et montrer que f est inversible, et même calculer explicitement son inverse comme un polynôme en f. C'est classique.)*

Ainsi, $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont des automorphismes de } \mathbb{R}^2\text{, d'inverses } u^{-1} = u^3 \text{ et } v^{-1} = -2v + \operatorname{id}}$

Montrer que u et v sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$, puis donner les expressions de u^{-1} et v^{-1} en fonction de u, v et id.

b) On effectue la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$: il existe deux polynômes Q_n et $R_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n = (X-1)^2 Q_n + R_n \qquad \text{et} \qquad \deg R_n < \deg(X-1)^2 \tag{1}$$

Comme $\deg R_n < 2$, $R_n = a_n X + b_n$. On évalue en $X = 1$:

$$1 = (1-1)^2 Q_n(1) + R_n(1) = a_n + b_n$$

De plus 1 est racine double donc on dérive (1) :

$$nX^{n-1} = 2(X-1)Q_n + (X-1)^2 Q_n' + R_n'$$

puis on évalue en $X = 1$ de nouveau : $n = a_n$.

Finalement nous avons un système : $\begin{cases} 1 & = & a_n + b_n \\ n & = & a_n \end{cases}$

Ce qui nous donne $\boxed{R_n = nX + (1-n)}$

Lorsqu'on évalue (1) en v, il vient

$$v^n = \underbrace{(v - \operatorname{id})^2}_{=0\ (A_3)} Q_n(v) + R_n(v) = \boxed{nv + (1-n)\operatorname{id}}$$

Une autre méthode plus élégante qui ne nécessite pas de division euclidienne : $v = \mathrm{id} + (v - \mathrm{id})$ *est une décomposition en diagonalisable (enfin, diagonale, vu que c'est l'identité) plus nilpotente* qui commutent *:* $\mathrm{id}(v - \mathrm{id}) = v - \mathrm{id} = (v - \mathrm{id})\mathrm{id}$.
Donc on peut appliquer la formule du binôme :

$$v^n = (\mathrm{id} + (v - \mathrm{id}))^n = \mathrm{id} + n(v - \mathrm{id}) = \boxed{(1-n)\mathrm{id} + nv}$$

3) Dimension : Ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ donc les dimensions possibles sont 0, 1 ou 2.

- Si $\dim \mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = 2$, alors $\mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = \mathbb{R}^2$ et $v - \mathrm{id}$ est surjectif.
  Comme $v - \mathrm{id}$ est un endomorphisme en dimension finie, il est alors bijectif, ce qui est contradictoire avec (A_3) : $(v - \mathrm{id})^2 = 0$.
  Donc c'est absurde.
- Si $\dim \mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = 0$, alors $\mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = \{0\}$ et $v - \mathrm{id} = 0$ et $v = \mathrm{id}$, ce qui est contradictoire avec (A_2).
- Donc $\dim \mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = 1$. D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim \mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) + \dim \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$$

  Par conséquent, $\dim \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}) = 1 = \dim \mathrm{Im}(v - \mathrm{id})$.

Montrons que $\mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$:

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) &\Longrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^2 / x = (v - \mathrm{id})(y) \\ &\Longrightarrow \exists y \in \mathbb{R}^2 / (v - \mathrm{id})(x) = (v - \mathrm{id})^2(y) = 0 \qquad \text{(d'après } (A_3)) \\ &\Longrightarrow x \in \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id}) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$
De plus, d'après ci-dessus, $\dim \mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = \dim \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})$.
Donc $\boxed{\mathrm{Im}(v - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{id})}$

4) D'après (A_4), les seuls dimensions possibles pour $\mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) \subset \mathbb{R}^2$ sont 1 et 2.
Si $\dim \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) = 2$, alors $u + v - \mathrm{id} = 0$. Ce qui s'écrit aussi $-u = v - \mathrm{id}$. Or en élevant au carré il vient $-\mathrm{id} = u^2 = (v - \mathrm{id})^2 = 0$ ((A_1) et (A_3)), ce qui est absurde.
Conclusion : $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) = 1}$

5) Soit (ε_2) une base de $\mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id})$, on pose : $\varepsilon_1 = -u(\varepsilon_2)$.

a) Montrons que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est un famille libre. Remarquons au préalable que :

$$\varepsilon_2 \in \mathrm{Ker}(u + v - \mathrm{id}) \Longrightarrow (u + v - \mathrm{id})(\varepsilon_2) \Longrightarrow \varepsilon_1 = -u(\varepsilon_2) = (v - \mathrm{id})(\varepsilon_2)$$

Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 = 0$. Alors, en composant par $(v - \mathrm{id})$, il vient

$$\alpha_1(v - \mathrm{id})(\varepsilon_1) + \alpha_2(v - \mathrm{id})(\varepsilon_2) = \alpha_1(v - \mathrm{id})^2(\varepsilon_2) + \alpha_2\varepsilon_1 = \alpha_2\varepsilon_1 = 0$$

Comme (ε_1) est une base d'un sous-espace vectoriel, $\varepsilon_1 \neq 0$, donc $\alpha_2 = 0$.
De même, en reprenant $\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 = \alpha_1\varepsilon_1 = 0$ il vient $\alpha_1 = 0$.
Donc la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre.
De plus $\mathrm{Card}((\varepsilon_1, \varepsilon_2)) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$.
Ainsi : $\boxed{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$

b)
- $u(\varepsilon_1) = -u^2(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$
- $u(\varepsilon_2) = -\varepsilon_1$

D'après (A_3), $v^2 = 2v - \mathrm{id}$.

- $v(\varepsilon_1) = (v^2 - v)(\varepsilon_2) = (v - \mathrm{id})(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$
- $\varepsilon_1 = v(\varepsilon_2) - \varepsilon_2$ donc $v(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

$$U = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \text{ et } V = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

6) D'après 1), si u et v ont pour matrices U et V, alors ils vérifient les conditions (A_i). D'après 5)b), si u et v vérifient les conditions (A_i), alors ils ont pour matrices (dans une base adaptée) U et V.

Donc $\boxed{u \text{ et } v \text{ vérifient les conditions } (A_i) \text{ si et seulement si ils ont pour matrices } U \text{ et } V}$

Exercice 2 (TPC 2010, partiel)

Partie 1 (Décomposition de Dunford : généralités)

1) a) i) $A = \Delta + N$.

ii) Δ est diagonale donc diagonalisable.

iii) $N^2 = 0$.

iv) $\Delta = 3I_2$ donc commute à N.

Donc $\boxed{(\Delta, N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A_1}$

b) $\Delta N = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc iv n'est pas vérifiée :

$\boxed{(\Delta, N) \text{ n'est pas une décomposition de Dunford de } A_2}$

2) $A_3 = A_3 + 0$, A_3 est diagonalisable, 0 est nilpotente, $0A_3 = 0 = A_3 0$.

Donc $\boxed{(A_3, 0) \text{ est une décomposition de Dunford de } A_3}$

3) De même, $\boxed{(0, A_4) \text{ est une décomposition de Dunford de } A_4}$

(sur votre copie, il faut évidemment vérifier les points i à iv)

4) $\Delta A = \Delta(\Delta + N) = \Delta^2 + \Delta N \overset{\text{(iv)}}{=} \Delta^2 + N\Delta = (\Delta + N)\Delta = A\Delta$.

De même $NA = N\Delta + N^2 = \Delta N + N^2 = AN$.

Donc $\boxed{\Delta \text{ et } N \text{ commutent avec } A}$

(Dans l'exercice précédent, $(\Delta, N) = (\mathrm{id}\,, v - \mathrm{id}\,)$ est une décomposition de Dunford de v)

Partie 2 (Étude d'un exemple)

1) a) $\chi_\Delta(x) = \det(xI_3 - \Delta) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x-3 & -1 \\ 1 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = (x-2)\big((x-3)^3 - 1\big) = (x-2)^2(x-4)$.

(Bien vérifier avec la trace)

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}\,(\Delta) = \{2, 4\}}$

Comme 0 n'est pas valeur propre, $E_0 = \mathrm{Ker}\,(-\Delta) = \mathrm{Ker}\ \Delta = \{0\}$.

Donc Δ correspond à un endomorphisme injectif, donc bijectif (endomorphisme en dimension finie). D'où $\boxed{\Delta \text{ est inversible}}$

b) Après calculs (à faire !) $E_2 = \mathrm{Vect}\,\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $E_4 = \mathrm{Vect}\,\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Donc $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de vecteurs propres qui diagonalise Δ (qui correspond à un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$). *Attention l'ordre est imposé par le D de l'énoncé.*

La matrice de passage entre la base canonique et cette nouvelle base est

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) P et D sont inversible, avec $D_1 = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ et Δ d'après a). Donc en passant aux inverse dans $\Delta = PDP^{-1}$ il vient

$$\Delta^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc $\boxed{\Delta^{-1} \text{ est diagonalisable}}$

Rappel : $(AB)B^{-1}A^{-1} = I_n = B^{-1}A^{-1}(AB)$ *donc par unicité de l'inverse* $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

2) **a)** $\chi_A(x) = \det(xI_3 - A) = ... = (x-2)^2(x-4)$. Après calculs, $E_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Donc $\dim E_2 = 1 < 2$, la dimension d'un des sous-espaces propres n'est pas égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante.

Donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$

b) $N^2 = 0$ donc $\boxed{N \text{ est nilpotente}}$

c) $N\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Delta N$.

d) $A = \Delta + N$ et vérifie ii (1)b)), iii (2)b)), iv (2)c)), donc $\boxed{(\Delta, N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A}$

3) Décomposition de Dunford de A^{-1}

a) En multipliant à droite par Δ^{-1}, 2.2.c s'écrit $N = \Delta N \Delta^{-1}$. Puis en multipliant à gauche par Δ^{-1} :

$$\boxed{\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}}$$

b) $N_1^2 = \Delta^{-1} \underbrace{N\Delta^{-1}}_{=\Delta^{-1}N \text{ (a)}} N = \Delta^{-2}N^2 = 0$ car $N^2 = 0$. Ainsi $\boxed{N_1 \text{ est nilpotente}}$

c) Comme I_3 et N_1 commutent : $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1) = I_3 - N_1^2 = I_3$.

Donc $\boxed{\text{La matrice carrée } I_3 + N_1 \text{ est inversible et } (I_3 + N_1)^{-1} = I_3 - N_1}$

d) De même qu'en 1)a), 0 n'est pas valeur propre de A donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$ [1]

e) Comme $N_1 = \Delta^{-1}N$, $N = \Delta N_1$ et

$$A = \Delta + N = \Delta + \Delta N_1 = \Delta(I_3 + N_1)$$

Donc A est de la forme $A'B'$ avec A' et B' inversible. D'où $\boxed{A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}}$

Or d'après c), $(I_3 + N_1)^{-1} = I_3 - N_1$. D'où, comme Δ^{-1} et N commutent

$$A^{-1} = (I_3 - N_1)\Delta^{-1} = \Delta^{-1} - \Delta^{-1}N\Delta^{-1} = \Delta^{-1} - N\Delta^{-2}$$

ii) D'après 1)c), Δ^{-1} est diagonalisable.

iii) Par un raisonnement identique à celui du 3)b), $N\Delta^{-2}$ est nilpotente.

iv) Comme N et Δ^{-1} commutent (3)a)), et Δ^{-2} et Δ^{-1} commutent, alors $N\Delta^{-2}$ et Δ^{-1} commutent.

Donc $\boxed{(\Delta^{-1}, -N\Delta^{-2}) \text{ est une décomposition de Dunford de } A^{-1}}$

1. Il faut détailler au moins une fois sur la copie, ensuite on peut dire « de même » en citant le numéro de la question.

Ce raisonnement se généralise à une matrice de taille n et N nilpotente d'ordre p. à la question 3)c), l'inverse de $I_3 + N_1$ devient alors $\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k N_1^k$ (série géométrique, rappelez-vous du DL de $\frac{1}{1+x}$) et la décomposition

$$(\Delta^{-1}, \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k N_1^k \Delta^{-1})$$

4) Décomposition de Dunford des puissances de A

a) Comme Δ et N commutent, la formule du binome s'écrit

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \Delta^{p-k} N^k$$

Comme N est nilpotente d'ordre 2, $N^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Ainsi

$$A^p = \Delta^p + p\Delta^{p-1} N$$

Or $\Delta^{p-1} = PD^{p-1}P^{-1}$. Il nous faut (malheureusement) P^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/ \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/2 L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

> *Évidemment ON VÉRIFIE SES CALCULS : regardez au moins quelques coefficients de PP^{-1}, ceux en bas à droite par exemple.*

Par conséquent

$$\Delta^p = PD^pP^{-1} = 2^{p-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{p-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1-2^p & 1+2^p & -1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}$$

(On vérifie les résultats pour $p = 0$ et $p = 1$).

Puis

$$\Delta^p N = 2^{p-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1-2^p & 1+2^p & -1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^p N$$

Donc finalement, en remplaçant dans $A^p = \Delta^p + p\Delta^{p-1}N$:

$$\boxed{A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N}$$

b) i) D'après a), $A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N$

ii) $\Delta^p = PD^pP^{-1}$ donc Δ^p diagonalisable.

iii) N est nilpotente donc αN aussi, en particulier $p2^{p-1}N$.

iv) N et Δ commutent donc, par récurrence, N et Δ^p aussi. Ainsi, Δ^p et $p2^{p-1}N$ commutent.

Conclusion : $\boxed{(\Delta^p, p2^{p-1}N) \text{ est une décomposition de Dunford de } A^p.}$

c) D'après un calcul effectué à la question a) $\boxed{\Delta^p = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1-2^p & 1+2^p & -1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}}$

En remplaçant dans la formule trouvée en a),

$$\boxed{A^p = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}}$$

Une décomposition de Dunford sert entre autre à ça : calculer les puissance de A : on a une diagonalisable (on sait calculer D puis D^p puis Δ^p facilement) et une nilpotente (N^k va rapidement faire 0) qui commutent (donc on peut appliquer le binôme). Ce que vous aviez vu jusqu'ici était des cas particulier de décomposition de Dunford.

5) Décomposition de Dunford de R vérifiant $R^2 = A$, R s'appelle une racine carrée de A

a) Soit $U = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

$$U^2 == \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D$$

Donc $U = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \pm\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$, ce qui est une très mauvaise notation (cf exercice 8).

L'ensemble des matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $U^2 = D$ est :

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon_1\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 2 \end{pmatrix} \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{0,1\}^3 \right\}}$$

(il y en a donc 8)

b) On prend donc $\varepsilon_i = 1$.

$$S = P\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \boxed{= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

Les valeurs propres de S sont $\sqrt{2}$ et 2, donc positives, et $S^2 = PUP^{-1}PUP^{-1} = PDP^{-1} = \Delta$.

c) Sur les formes diagonalisées (i.e. dans la base de vecteurs propres trouvée en 1)b)), on cherche a et b tels que $U = aD + bI_3$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & 0 \\ 0 & 0 & 4a+b \end{pmatrix}$$

Donc a et b vérifient $\left\{ \begin{array}{rcl} 2a+b & = & \sqrt{2} \\ 4a+b & = & 2 \end{array} \right.$.

Ainsi $\boxed{(a,b) = (\frac{2-\sqrt{2}}{2}, -2+\sqrt{2})}$ convient.

Par conséquent, $SN_1 = (a\Delta + bI_3)N_1 = N_1(a\Delta + bI_3)$, puisque Δ et I_3 commutent avec N_1 (d'après un calcul effectué au 3)e)).

Conclusion : $\boxed{S \text{ et } N_1 \text{ commutent}}$

d) I_3 et N_1 commutent donc le binôme s'écrit

$$M^2 = I_3 + 2\Big(\frac{1}{2}N_1\Big) + \frac{1}{4}\underbrace{N_1^2}_{=0} = I_3 + N_1$$

e) D'après c), $\Delta = S^2$. D'après d), $I_3 + \Delta^{-1}N = M^2$. D'après c), S et M (polynôme en N_1) commutent. Ainsi

$$A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N) = S^2M^2 = SMSM = (SM)^2$$

Donc $\boxed{R = SM = \Big(\dots\Big) \text{ vérifie } R^2 = A}$

f) $R = SM = S(I_3 + \frac{1}{2}\Delta^{-1}N) = S + \frac{1}{2}S^{-1}N$. De plus S et $S^{-1}N$ commutent (car S et N_1 commutent), donc

$$\boxed{(S, \frac{1}{2}S^{-1}N) \text{ est une décomposition de Dunford de } R}$$