Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Le but de cet exercice est de trouver les couples (u, v) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ vérifiant les 4 assertions suivantes :

(A_1) : $u^2 = -\mathrm{id}$ (il faut comprendre $u \circ u = -\mathrm{id}$).

(A_2) : $v \neq \mathrm{id}$.

(A_3) : $(v - \mathrm{id})^2 = 0$.

(A_4) : $\mathrm{Ker}\,(u + v - \mathrm{id}) \neq \{0\}$.

1) Étude d'un exemple. Soit les matrices $U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vérifier que les endomorphismes u et v dont les matrices dans $\mathscr{B}$ sont respectivement U et V sont des solutions du problème posé.

On revient au cas général et on considère un couple (u, v) solution du problème.

2) **a)** Montrer que u et v sont des automorphismes de $\mathbb{R}^2$, puis donner les expressions de u^{-1} et v^{-1} en fonction de u, v et id.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux polynômes Q_n et $R_n \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n = (X - 1)^2 Q_n + R_n \qquad \text{et} \qquad \deg R_n < \deg(X - 1)^2$$

On précisera l'expression de R_n en fonction de n.
Exprimer v^n comme combinaison linéaire de v et id.

3) Établir que $\mathrm{Im}\,(v - \mathrm{id}) = \mathrm{Ker}\,(v - \mathrm{id})$.

4) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\,(u + v - \mathrm{id}) = 1$.

5) Soit (ε_2) une base de $\mathrm{Ker}\,(u + v - \mathrm{id})$, on pose : $\varepsilon_1 = -u(\varepsilon_2)$.

a) Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) Donner les matrices U et V de u et v dans cette base.

6) Donner la conclusion de cet exercice.

Exercice 2

Partie 1 (Décomposition de Dunford : généralités)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n et 0_n respectivement la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, s'il existe $\Delta, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

i) $A = \Delta + N$,

ii) Δ est diagonalisable,

iii) N est nilpotente (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$),

iv) $\Delta N = N\Delta$, autrement dit les matrices Δ et N commutent,

alors on dira que le couple (Δ, N) est une **décomposition de Dunford** de A.

1) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A_1.

b) Soient $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que (Δ, N) n'est pas une décomposition de Dunford de A_2.

2) Soit A_3 une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_3 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

3) De même, soit A_4 une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A_4 admet une décomposition de Dunford que l'on donnera.

4) Vérifier que si (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A, alors Δ et N commutent avec A.

Partie 2 (Étude d'un exemple)

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, on pose $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Étude de Δ

a) Déterminer le spectre de Δ, en déduire que Δ est inversible.

b) Montrer que Δ est diagonalisable et la diagonaliser sous la forme $P^{-1}\Delta P = D$, avec $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible que l'on précisera et

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) En déduire, de manière élémentaire, que Δ^{-1} est diagonalisable, et exprimer Δ^{-1} en fonction de P, P^{-1} et d'une matrice diagonale D_1 à déterminer.

2) Décomposition de A

a) Montrer que A n'est pas diagonalisable.

b) Montrer que N est nilpotente.

c) Vérifier que $N\Delta = \Delta N$.

d) En déduire que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

3) Décomposition de Dunford de A^{-1}
On pose $N_1 = \Delta^{-1}N$.

a) À l'aide de **2.2.c** montrer que $\Delta^{-1}N = N\Delta^{-1}$.

b) En déduire que N_1 est nilpotente.

c) Développer $(I_3 + N_1)(I_3 - N_1)$. En déduire que $I_3 + N_1$ est inversible et donner son inverse en fonction des matrices précédente (on ne cherchera pas à déterminer ses coefficients).

d) Justifier l'existence de A^{-1}.

e) Montrer que $A^{-1} = (I_3 + N_1)^{-1}\Delta^{-1}$ et en déduire une décomposition de Dunford de A^{-1}.

4) Décomposition de Dunford des puissances de A
Soit $p \in \mathbb{N}$.

a) À l'aide de la décomposition de Dunford (Δ, N) de A, montrer que

$$A^p = \Delta^p + p2^{p-1}N.$$

b) Vérifier que $(\Delta^p, p2^{p-1}N)$ est une décomposition de Dunford de A^p.

c) Calculer Δ^p. En déduire que :

$$A^p = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 2+p & -p & p \\ 1+p-2^p & 1-p+2^p & p-1+2^p \\ 1-2^p & -1+2^p & 1+2^p \end{pmatrix}.$$

5) Décomposition de Dunford de R vérifiant $R^2 = A$, R s'appelle une racine carrée de A

a) Déterminer les matrices $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonales vérifiant $U^2 = D$.

b) À l'aide des matrices P et P^{-1}, déterminer alors une matrice S à **valeurs propres positives** telle que $S^2 = \Delta$.

c) Déterminer deux réels a et b, tels que $S = a\Delta + bI_3$, en raisonnant sur les formes diagonalisées. En déduire que S et N_1 commutent.

d) On pose $M = I_3 + \dfrac{1}{2}N_1$. Montrer que $M^2 = I_3 + N_1$.

e) En remarquant que $A = \Delta(I_3 + \Delta^{-1}N)$, déterminer une matrice R telle que $R^2 = A$.

f) Donner une décomposition de Dunford de R.