# Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

---

## Exercice 1 (PT A 2013)

### Partie 1 (Préliminaires)

**1)** La condition est $q = r$, car la définition du produit est $c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$.

La matrice $AB$ sera de taille $p \times s$, $p$ lignes et $s$ colonnes.

**2)** **a)** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ fixés. Par définition de la convergence des suites $(A_p)_p$ et $(B_p)_p$ vers, respectivement, $A$ et $B$, on a

$$\lim_{p\to+\infty} a_{ij}^{(p)} = a_{ij} \qquad \text{et} \qquad \lim_{p\to+\infty} b_{ij}^{(p)} = b_{ij}$$

Donc, comme une somme de suite convergente est convergente, $(a_{ij}^{(p)} + b_{ij}^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge, et par linéarité de la limite,

$$\lim_{p\to+\infty} a_{ij}^{(p)} + b_{ij}^{(p)} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ainsi, la suite $(A_p + B_p)_p$ converge vers $A + B$.

**b)** Posons $C_p = A_p B_p$ et $C = AB$, de coefficients

$$c_{ij}^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{(p)} b_{kj}^{(p)} \qquad \text{et} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ fixés. Les suites convergentes sont un anneau et la limite est un morphisme d'anneaux. Donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la suite $(a_{ik}^{(p)} b_{kj}^{(p)})_p$ converge vers $a_{ik} b_{kj}$ . En sommant sur $k$, on trouve que $(c_{ij}^{(p)})_p$ converge vers $c_{ij}$.
Ainsi, la suite $(A_p B_p)_p$ converge vers $AB$.

### Partie 2

**1)** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Comme $m_{ik} \geqslant 0$, le second point nous donne :

$$m_{ij} = 1 - \sum_{k=1;k\neq j}^{n} m_{ik} \leqslant 1$$

Conclusion : $\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad m_{ij} \leqslant 1}$

**2)** Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

**a)** Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = MX_1$. Par définition du produit matriciel (rappelé au 1.1),

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad y_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \qquad (\text{car } x_k = 1 \text{ pour tout } k)$$

Or $M$ est stochastique, donc $y_i = 1$, et $Y = X_1$.
Conclusion : $\boxed{MX_1 = X_1}$

**b)** Si $M$ est à coefficients positifs, alors le premier point est vérifié. De plus, par définition du produit matriciel $MX_1 = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{nj} \end{pmatrix}$, donc $MX_1 = X_1 \Longrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$

Ainsi, $\boxed{M \text{ est stochastique.}}$

**c)** En 2)a)-b), nous venons de montrer une nouvelle caractérisation des matrices stochastiques. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices stochastiques. D'après 2)a), elles vérifient $AX_1 = X_1$ et $BX_1 = X_1$. Donc

$$ABX_1 = A(BX_1) = AX_1 = X_1$$

De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} \geqslant 0$ et $b_{ij} \geqslant 0$ entraîne

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \geqslant 0$$

Donc d'après 2)b), $\boxed{\text{La matrice } AB \text{ est stochastique.}}$

**3)** Soit $M$ une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = 1$.

**a)** Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$|y_i| = \left| \sum_{k=1}^{n} m_{ik} x_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |m_{ik} x_k| \overset{(\star)}{=} \sum_{k=1}^{n} m_{ik} |x_k| \overset{(\star\star)}{\leqslant} \sum_{k=1}^{n} m_{ik} \times 1 = 1$$

Car $m_{ik} \geqslant 0$ (($\star$)) et $|x_k| \leqslant 1$ (($\star\star$)).

Donc $\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ |y_i| \leqslant 1.}$

**b)** On a supposé que $y_i = \lambda x_i$. Donc 3)a) nous donne :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad |\lambda| |x_i| \leqslant 1$$

Or $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = 1.$ : il existe un $i_0$ tel que $|x_{i_0}| = 1$. Pour $i = i_0$, l'inégalité précédente s'écrira

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1}$$

**c)** Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul vérifiant $MX = \lambda X$.

Soit $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. Comme $X \neq 0$, $M \neq 0$. On peut donc poser $\widetilde{X} = \dfrac{1}{M} X = \begin{pmatrix} x_1/M \\ \vdots \\ x_n/M \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\widetilde{X}$ vérifiera $M\widetilde{X} = \lambda \widetilde{X}$ (on a multiplié les deux côtés par $\dfrac{1}{M}$) et

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\widetilde{x}_i| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \frac{x_i}{M} \right| = \frac{1}{M} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| = 1$$

Donc d'après 3)b), $|\lambda| \leqslant 1$.