Devoir de Mathématiques numéro 3

Exercice 1

Le 1) de la partie 1 peut servir dans la partie 2.

Partie 1 (Préliminaires)

1) Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ de terme général a_{ij} et $B \in \mathscr{M}_{r,s}(\mathbb{C})$ de terme général b_{ij}.

- **a)** A quelle condition sur p, q, r et s le produit AB est-il défini ? Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
- **b)** Sous cette condition, on note c_{ij} le terme général de la matrice AB. Exprimer c_{ij} en fonction des a_{ij} et b_{ij}.

2) Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $a_{ij}^{(p)}$ le terme général de la matrice A_p.
On dit que la suite de matrices converge vers une matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ si pour tout couple (i,j) la suite complexe $(a_{ij}^{(p)})_p$ converge vers a_{ij}.

- **a)** Montrer que, si la suite $(A_p)_p$ converge vers A et si la suite $(B_p)_p$ converge vers B, alors la suite $(A_p + B_p)_p$ converge vers $A + B$.
- **b)** Montrer que, sous les mêmes conditions, la suite $(A_pB_p)_p$ converge vers AB.

Partie 2

Soit $M = (m_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On dit que la matrice M est *stochastique* si

- pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
$$m_{ij} \geqslant 0$$
- la somme des termes de chaque ligne est égale à 1, c'est-à-dire,
$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1$$

1) Soit $M = (m_{ij})$ une matrice stochastique. Montrer que,
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad m_{ij} \leqslant 1$$

2) Soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **a)** Montrer que si M est stochastique, alors $MX_1 = X_1$.
- **b)** Réciproquement, soit M une matrice carrée d'ordre n à coefficients positifs. Montrer que si $MX_1 = X_1$, alors M est stochastique.
- **c)** En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.

3) Soit M une matrice stochastique, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| = 1$.

- **a)** On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = MX$.
  Montrer que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $|y_i| \leqslant 1$.
- **b)** En déduire que, si $MX = \lambda X$, alors $|\lambda| \leqslant 1$.
- **c)** Montrer que tous les $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ non nul vérifiant $MX = \lambda X$ sont de module inférieur à 1.