Devoir de Mathématiques numéro 3

Correction

Exercice 1 (Petites mines 2009, épreuve commune)

1) **a)** Soit P, $Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P+Q) &= \frac{1}{2}\left[(\lambda P+Q)\Big(\frac{X}{2}\Big)+(\lambda P+Q)\Big(\frac{X+1}{2}\Big)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\lambda P\Big(\frac{X}{2}\Big)+Q\Big(\frac{X}{2}\Big)+\lambda P\Big(\frac{X+1}{2}\Big)+Q\Big(\frac{X+1}{2}\Big)\right] \\ &= \lambda f(P)+f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire. De plus $f(P)$ est évidemment un polynôme, et $\deg(f(P)) \leqslant \deg P$ a priori. Donc $f(P) \in E$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme}}$

b) L'application φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est linéaire par définition de l'évaluation :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \varphi(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(1) = \lambda P(1)+Q(1) = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est linéaire, à valeur dans } \mathbb{R}.}$

c) Calculons l'image des vecteurs de la base de départ, décomposée dans la base d'arrivée (ici, la même).

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2}(1+1) &&= 1 &&= 1\times 1+0\times X+0\times X^2 \\ f(X) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{X}{2}+\frac{X+1}{2}\Big) &&= \frac{X}{2}+\frac{1}{4} &&= \frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{2}\times X+0\times X^2 \\ f(X^2) &= \frac{1}{2}\left[\Big(\frac{X}{2}\Big)^2+\Big(\frac{X+1}{2}\Big)^2\right] &&= \frac{X^2}{4}+\frac{X}{4}+\frac{1}{4} &&= \frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{4}\times X+\frac{1}{8}\times X^2 \end{aligned}$$

En rangeant en colonne les résultats obtenus, on trouve

$$\boxed{\operatorname{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{B}) = A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

d) Pour l'injectivité, on peut calculer $\operatorname{Ker} f$. Comme on vient de déterminer la matrice, on va calculer le déterminant, calcul très rapide ici :

$$\det A = 1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq 0$$

Donc f est bijective, et en particulier injective et surjective.

e) Soit $P = aX^2 + bX + c$.

$$\varphi(P) = P(1) = a + b + c = 0 \iff P = aX^2 + bX - a - b = a(X^2 - 1) + b(X - 1)$$

Donc $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}(X^2 - 1, X - 1)$, et $\boxed{(X^2 - 1, X - 1) \text{ est une base de } \operatorname{Ker} \varphi}$

Ainsi, $\boxed{\dim \operatorname{Ker} \varphi = 2}$ Comme $\operatorname{Ker} \varphi \neq \{0\}$, $\boxed{\varphi \text{ n'est pas injective}}$

De plus, le théorème du rang s'écrit $\dim \operatorname{Im} \varphi = \dim E - \dim \operatorname{Ker} \varphi = 3 - 2 = 1$.

Comme $\operatorname{Im} \varphi \subset \mathbb{R}$ de dimension 1, $\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}$ et $\boxed{\varphi \text{ est surjective}}$

2) **a)** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a + b(-2X + 1) + c(6X^2 - 6X + 1) = 0$. En développant,

$$0 = a + b(-2X + 1) + c(6X^2 - 6X + 1) = (a + b + c) + (-2b - 6c)X + 6cX^2$$

Un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : $\begin{cases} a + b + c & = & 0 \\ -2b - 6c & = & 0 \\ 6c & = & 0 \end{cases}$ Comme ce système est triangulaire[1], il vient $c = b = a = 0$.

Par conséquent la famille est <u>libre</u>. De plus <u>$\operatorname{Card} \mathscr{B}' = 3 = \dim E$</u>, donc $\boxed{\mathscr{B}' \text{ est une base de } E.}$

$$Q = \operatorname{Mat}(\operatorname{id}_E, \mathscr{B}', \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Il faudrait évidemment donner au moins une étape intermédiaire pour le calcul de Q^{-1}

b) On peut soit calculer l'image des vecteurs de $\mathscr{B}'$, *décomposée dans $\mathscr{B}'$*, en espérant que la décomposition dans $\mathscr{B}'$ se passe bien (de fait, c'est le cas). Ou bien effectuer un produit matriciel. Cf. le cours sur les matrices (sup ou à venir) pour l'ordre.

$$M = Q^{-1}AQ = [\text{calculs}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

c) *On peut calculer A^2, A^3, et constater qu'aucune formule n'apparaît, et que ce n'est donc pas la bonne méthode... Donc on va utiliser la question précédente !* Comme $Q^{-1}Q = I_3$,

$$A^n = (QMQ^{-1})^n = QMQ^{-1}QMQ^{-1} \dots QMQ^{-1} = QM^nQ^{-1}$$

Or $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4^n} \end{pmatrix}$, donc finalement

$$\boxed{A^n = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4^n} \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}} & \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{4^n} \\ 0 & \dfrac{1}{2^n} & \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{4^n} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4^n} \end{pmatrix}}$$

On vérifie que cette formule reste vraie pour $n = 0$. (*Dans ce genre de calcul, il est facile de faire une étourderie. Pour* **vérifier ses calculs** *tester pour $n = 0$ ($A^0 = I$) et $n = 1$ ($A^1 = A$)*)

1. Ce qui est toujours le cas lorsque la famille de polynômes est de degrés échelonnés : on peut montrer qu'une famille de degrés échelonnés est toujours libre.

d) Dans la base $\mathscr{B}$, P a pour vecteur colonne $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et $f^n(P)$ a pour vecteur colonne $Y = A^n X$.

Ainsi, d'après c), $Y = \begin{pmatrix} a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6}\frac{1}{4^n}\right)b \\ \left(\frac{1}{2^n}\right)b + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)c \\ \frac{c}{4^n} \end{pmatrix}$, et finalement

$$\boxed{f^n(P) = \left[a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6}\frac{1}{4^n}\right)b\right] + \left[\left(\frac{1}{2^n}\right)b + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)c\right] X + \frac{c}{4^n}X^2}$$

Même remarque.

e) $\varphi(f^n(P)) = \left[a + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)b + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{6}\frac{1}{4^n}\right)b\right] + \left[\left(\frac{1}{2^n}\right)b + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}\right)c\right] + \frac{c}{4^n}$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$$

De plus $\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \left[at + \frac{b}{2}t^2 + \frac{c}{3}t^3\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}$.

Conclusion : $\forall P \in E$, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t}$

3) a) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \forall P \in E\ f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $f(P) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right) + P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2^1}\sum_{k=0}^{2^1-1} P\left(\frac{X+k}{2^1}\right)$ par définition de f.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= f(f^n(P)) = f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{\frac{X+k}{2^n}+1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + P\left(\frac{X+k+2^n}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) + \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right)\right) = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+k}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \forall P \in E\ f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)}$

b) D'après la question précédente, $\varphi(f^n(P)) = f^n(P)(1) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} P\left(\frac{k}{2^n}\right)$.

On reconnaît une somme de Riemann, associée à la subdivision de $[0,1]$ de pas $\frac{1}{2^n}$. Comme la fonction $t \mapsto P(t)$ est continue, la suite des sommes de Riemann converge vers l'intégrale :

$$\forall P \in E,\ \boxed{\lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 2 (Centrale-Supélec TSI 2012)

1) **a)** Soit $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0} a_kP_k=0$. En évaluant en $X=-k$, pour $k\in[\![0,n]\!]$ (autant que possible les racines des P_k) l'égalité précédente, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_0 & & & & & & & = & 0\\ a_0 & - & a_1 & & & & & = & 0\\ \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots\\ a_0 & - & na_1 & + & \dots & + & (-1)^n a_n & = & 0\end{array}\right. \Longrightarrow a_0=a_1=\dots=a_n=0$$

Donc la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre. De plus il y a $n+1=\dim\mathbb{R}_n[X]$ vecteurs dans cette famille. Ainsi, $\boxed{\text{La famille } (P_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

b) Soit k un entier vérifiant $1\leqslant k\leqslant n$. $P_k(X+1)=\dfrac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+j+1)=\dfrac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(X+j)$ donc

$$\begin{aligned}\Delta(P_k)(X) &= P_k(X+1)-P_k(X)=\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(X+j)-\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+j)\\ &= \left(\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(X+j)\right)(X+k-X)=\frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=1}^{k-1}(X+j)=P_{k-1}(X+1)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\Delta(P_k)(X)=P_{k-1}(X+1)}$ De plus $\boxed{\Delta(P_0)=1-1=0}$

c) Remarquons tout d'abord que $\Delta(P(X+t))(X)=\Delta(P(X))(X+t)$, pour tout $t\in\mathbb{R}$ (i.e., les applications linéaires Δ et $P(X)\mapsto P(X+t)$ commutent. Ce qui n'a rien d'évident a priori) ;
Soit k un entier vérifiant $0\leqslant k\leqslant n$. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_m:\quad \Delta^m(P_k)(X)=P_{k-m}(X+m)$$

est vraie pour tout $m\in[\![0,k]\!]$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par hypothèse ($\Delta^0=\mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$).
- $\underline{\mathcal{H}_m\Longrightarrow\mathcal{H}_{m+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_m$ vraie, pour un $m\in[\![0,k-1]\!]$ (pour pouvoir considérer $\mathcal{H}_{m+1}$).

$$\Delta^{m+1}(P_k)(X)=\Delta(P_{k-m}(X+m))=\Delta(P_{k-m})(X+m)$$

Or, comme $k-m\in[\![1,n]\!]$, d'après b) : $\Delta(P_{k-m})=P_{k-m-1}(X+1)$.
Ainsi, $\Delta^{m+1}(P_k)(X)=P_{k-m-1}(X+m+1)$. Donc $\mathcal{H}_{m+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall m\in[\![0,k]\!]\qquad \Delta^m(P_k)(X)=P_{k-m}(X+m)}$

Cas $m\geqslant k+1$: On peut appliquer le résultat précédent pour k :

$$\Delta^k(P_k)(X)=P_0(X+k)=1=P_0$$

Donc $\Delta^{k+1}(P_k)(X)=\Delta(P_0)=0$ d'après b). Et par linéarité de Δ *(donc $\Delta(0)=0$)*

$$\boxed{\Delta^m(P_k)(X)=\Delta^{m-(k+1)}(0)=0}$$

d) D'après 1)a), on sait que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Donc si $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P=\sum_{k=0}^{n-1}a_kP_k$. Ainsi, d'après 1)c), comme $n\geqslant k+1$ dans la somme,

$$\Delta^n(P)=\sum_{k=0}^{n-1}a_k\Delta^n(P_k)=0$$

2) **a)** Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad \Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie : $P = P$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned}
\Delta^{n+1}(P)(X) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Delta(P(X+k)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k+1) - P(X+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} (-1)^{n+1-k} P(X+k) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k) \\
&= P(X+n+1) + \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) (-1)^{n+1-k} P(X+k) \right] + P(X) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^{n+1-k} P(X+k)
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad \Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)}$

b) Soit $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Appliquons les questions 1)d) et 2)a) à $X^r \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\Delta^n(X^r) \overset{1)d)}{=} 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta^n(X^r) \overset{2)a)}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X+k)^r$$

On peut simplifier par $(-1)^n$, et en remarquant que $(-1)^{-k} = (-1)^k$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (X+k)^r = 0$$

On a montré cette égalité dans le DS3, à l'aide du DL d'exponentielle