# Devoir de Mathématiques numéro 3

## Exercice 1

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On identifiera dans la suite de ce problème les polynômes de $E$ et leurs fonctions polynomiales associées. On note $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $E$. Pour tout $P \in E$, on définit les deux applications suivantes :

$$f(P) = \frac{1}{2}\left[P\Big(\frac{X}{2}\Big) + P\Big(\frac{X+1}{2}\Big)\right] \qquad \text{et} \qquad \varphi(P) = P(1)$$

On rappelle que, pour $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $u^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u^n = u \circ u^{n-1}$.

**1)** **a)** Montrer que $f$ est un endomorphisme.

**b)** Montrer que $\varphi$ est linéaire, à valeur dans un espace vectoriel que l'on précisera.

**c)** Écrire la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ de $E$, en indiquant les calculs intermédiaires.

**d)** L'application $f$ est-elle injective, surjective ?

**e)** Déterminer une base de Ker $\varphi$. Quelle est la dimension de Ker $\varphi$ ? L'application $\varphi$ est-elle injective, surjective ?

**2)** Calcul des puissances successives d'une matrice. On note $I_3$ la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Soit $\mathscr{B}' = (1, -2X+1, 6X^2-6X+1)$.

**a)** Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $E$. Écrire la matrice de passage $Q$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Calculer son inverse.

**b)** Écrire la matrice $M$ de $f$ dans la base $\mathscr{B}'$ en donnant au moins une étape intermédiaire.

**c)** Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**d)** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $P = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $f^n(P)$ en fonction de $a$, $b$ et $c$.

**e)** En déduire que $\forall P \in E,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

**f)** Pour les 5/2 : retrouver la base $\mathscr{B}'$ en diagonalisant $A$.

**3)** Une autre preuve du résultat précédent.

**a)** Montrer par récurrence que $\forall P \in E\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n(P) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\Big(\frac{X+k}{2^n}\Big)$.

**b)** En déduire, en utilisant un résultat du cours d'analyse que l'on énoncera avec précision, que

$$\forall P \in E,\ \lim_{n\to+\infty} \varphi(f^n(P)) = \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

## Exercice 2

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels.
On définit sur $\mathbb{R}[X]$ l'application $\Delta$ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par :

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Cette application $\Delta$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, ce qu'on ne demande pas de justifier. Pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on définit l'endomorphisme $\Delta^n$ obtenu en composant $n$ endomorphismes égaux à $\Delta$ :

$$\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \cdots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$$

On considère la famille de polynômes $(P_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ P_n(X) = \dfrac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!} = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(X+j) \quad \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Dans les questions qui suivent, $n$ désigne toujours un entier supérieur ou égal à 1.

**1)** **a)** Montrer que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $n$.

**b)** Soit $k$ un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$.
Déterminer $\Delta(P_k)(X)$ en fonction de $P_{k-1}(X+1)$. Donner également la valeur de $\Delta(P_0)$.

**c)** Soit $m$ un entier supérieur ou égal 1 et $k$ un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$.
Déterminer $\Delta^m(P_k)$ en distinguant les cas : $0 \leqslant m \leqslant k-1$, $m = k$ et $m \geq k+1$.

**d)** Déduire de ce qui précède que, si $P$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors $\Delta^n(P) = 0$.

**2)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

**a)** Démontrer que le polynôme $\Delta^n(P)$ est donné par la formule

$$\Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}P(X+k)$$

Indication : *On pourra effectuer une récurrence.*

**b)** En déduire, pour tout entier $r$ vérifiant $0 \leqslant r \leqslant n-1$, l'égalité suivante,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k(X+k)^r = 0 \tag{1}$$