Devoir de Mathématiques numéro 2

Correction

Exercice 1 (CCP PSI 2013 1)

1) a) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une primitive $\mathscr{C}^1$ s'annulant en 0 qui a pour expression

$$f : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. En effectuant le changement de variable $u = -t$ il vient

$$f(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{x} e^{-(-u)^2}(-1)\,\mathrm{d}u = -f(x)$$

Donc $\boxed{f \text{ est une fonction impaire } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$

b) Par définition d'une primitive, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x^2}$. Or f' est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. Donc $\boxed{f \text{ est indéfiniment dérivable sur } \mathbb{R}.}$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = p_n(x)\exp(-x^2)$$

où p_n est un polynôme de degré $n-1$, est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: est vraie avec $p_1 = 1$, d'après l'expression de f' calculée ci-dessus.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (p_n'(x) - 2xp_n(x))\exp(-x^2) = p_{n+1}(x)\exp(-x^2)$$

  avec $p_{n+1}(X) = p_n'(X) - 2Xp_n(X)$. Comme p_n est un polynôme de degré $n-1$, $2Xp_n$ est de degré n et p_{n+1} aussi. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- $\underline{\text{Conclusion}}$: $\boxed{\forall n \geqslant 1\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = p_n(x)\exp(-x^2) \qquad \text{où } p_n \in \mathbb{R}[X],\ \deg p_n = n-1}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dériver n fois l'expression $f(x) = -f(-x)$ obtenue à la question 1)a) prouve que $f^{(n)}$ a la parité de $n-1$. Comme $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire, $\boxed{\text{Le polynôme } p_n \text{ a la parité de } n-1.}$

d) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et est finie, c'est exactement montrer la convergence de l'intégrale impropre en $+\infty$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Comme $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$, par définition de la limite il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $t \geqslant t_0$

$$0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par majoration la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ l'est aussi. Par conséquent l'intégrale converge et

$$\boxed{f \text{ admet une limite finie en } +\infty}$$

2) **a)** Au voisinage de 0, $e^X = \sum_{n=0}^{N} \frac{X^n}{n!} + o\left(X^N\right)$.

Donc en remplaçant : $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + o\left(x^{2N}\right)$

De plus les développements limités s'intègrent : $\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + o\left(x^{2N+1}\right)}$

b) La formule de Taylor-Young à l'ordre $2N+1$ (comme f est $\mathscr{C}^\infty$) nous donne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{2N+1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o\left(x^{2N+1}\right)$$

Par unicité du développement limité, $f^{(2n)}(0) = 0$ (prévisible, puisque $f^{(2n)}$ est impaire) et $f^{(2n+1)}(0) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{n!(2n+1)}$

Comme $f^{(k)}(0) = p_k(0) e^{-0} = p_k(0)$, en conclusion,

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ p_{2n}(0) = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ p_{2n+1}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}}$

3) **a)** Soit $n \geqslant 0$. On effectue le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$.

Donc $\cos(t) = \cos(\pi/2 - u) = \sin(u)$ et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$.

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n u (-1) \,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

b) $\boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$.
Supposons que $W_n = 0$. Puisque $t \mapsto \cos^n t$ est continue, alors $\cos^n t = 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, ce qui est absurde (par exemple $\cos 0 = 1$).

Ainsi, $\boxed{W_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) Soit $n \geqslant 2$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \times (\cos^{n-1} t) \,\mathrm{d}t \\ &= \Big[(\sin t) \times (\cos^{n-1} t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) \left(-(n-1)(\sin t)(\cos^{n-2} t)\right) \,\mathrm{d}t \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\cos^{n-2} t) \,\mathrm{d}t = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \,\mathrm{d}t \\ &= (n-1) W_{n-2} - (n-1) W_n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}.}$

d) Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = nW_nW_{n-1}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = (nW_n)W_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1}$$

La suite $\boxed{u_n = nW_nW_{n-1} \text{ est donc constante de valeur } u_1 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}.}$

e) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $\cos^n t \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$
Soit $n \geqslant 2$. D'après 1)c), $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. Ainsi, puisque (W_n) est décroissante,

$$\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n} W_{n-2} = W_n \leqslant W_{n-1}$$

Puisque $W_k \neq 0$ d'après 1)b), il reste à diviser par W_{n-1} et constater que l'inégalité est vraie en $n = 1$: $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ \frac{n-1}{n} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.}$

f) Rappel : Pour des suites non nulles au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

D'après 1)d), $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\frac{1}{W_{n-1}} = \frac{2}{\pi} nW_n$ et l'encadrement de la question 2)a) s'écrit :

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{2}{\pi} nW_n^2 \leqslant 1$$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} nW_n^2 = 1$, c'est-à-dire $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et, comme $W_n > 0$,

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

4) Calcul de Δ

a) Soit $g(u) = e^u - 1 - u$. Une étude des variations sur $\mathbb{R}$ nous donne, en complétant du haut vers le bas,

u	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g''(u) = e^u$	$+$
g'	$0 \nearrow$
$g'(u) = e^u - 1$	$+$
g	$0 \nearrow$

Donc $g \geqslant 0$ puis $\boxed{\text{Pour tout réel } u, \text{ on a } \mathrm{e}^u \geqslant 1 + u}$

b) Soit n un entier naturel non nul et $u \leqslant 1$.
En remplaçant u par $-u$ dans l'expression précédente, il vient

$$0 \leqslant (1-u) \leqslant e^{-u}$$

Donc en élevant à la puissance n on trouve $\boxed{(1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu}}$
Soit $u > -1$. L'inégalité du a) s'écrit $0 < 1 + u \leqslant e^u$. En passant aux inverses puis à la puissance n :

$$\boxed{e^{-nu} \leqslant \frac{1}{(1+u)^n}}$$

c) D'après b), en posant $u = x^2 \geqslant 0 > -1$,

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad e^{-nx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^n}$$

Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{1}{(1+x^2)^n} \sim \dfrac{1}{x^{2n}}$. Comme $n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geqslant 2 > 1$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \mathrm{d}x$ converge par comparaison avec une intégrale de Riemann.
En intégrant entre 0 et $+\infty$ l'inégalité précédente (*toutes les intégrales convergent*) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \, \mathrm{d}x$$

L'autre inégalité obtenue au b), après avoir remplacé u par $x \in [0, 1]$ puis intégré entre 0 et 1, nous donne

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x$$

Comme $\mathrm{e}^{-nx^2} \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x$ (Chasles et positivité de l'intégrale). Ainsi, finalement,

$$\boxed{\int_0^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}}$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = \sin(t)$, il vient

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^n \cos t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t \, \mathrm{d}t = W_{2n+1}$$

En posant $t = \sqrt{n}x$, on trouve

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{n}} = \frac{\Delta}{\sqrt{n}}$$

En posant $x = \tan t$, $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\cos^2(t)} \mathrm{d}t$ et $1 + x^2 = 1 + \tan^2(t) = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$ donc il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\pi/2} (\cos^2(t))^n \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2(t)} = W_{2n-2}$$

Comment trouver ce changement de variable ? D'abord, c'est la dernière question d'une partie : ce n'est pas forcément facile. Ensuite, il faut toujours penser à partir « des deux bouts » : on veut montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = W_{2n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} t \, \mathrm{d}t$$

Donc un changement de variable qui transforme $\dfrac{1}{1+x^2}$ en $\cos^2(t)$ serait bienvenu. On pose (au brouillon !!) $\dfrac{1}{1+x^2} = \cos^2(t)$ et on en déduit que $x = \tan t$ est un bon parti.

Finalement l'encadrement de la question précédente s'écrit :

$$\boxed{W_{2n+1} \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leqslant W_{2n-2}}$$

Puis $\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \Delta \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$. Or d'après 3)f), $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ donc

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \sim \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{n}{4n+2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Donc par encadrement : $\boxed{\Delta = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Exercice 2 (PT 2007 — Épreuve C, partie 2)

On considère l'application ψ définie pour tout réel x par

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\text{ch } t} \, \mathrm{d}t$$

1) a) Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$, $|\cos(xt)| \leqslant 1$ et $e^{-t} \geqslant 0$, donc

$$|g(x,t)| = \frac{\cos(xt)}{\frac{e^t - e^{-t}}{2}} \leqslant \frac{1}{\frac{e^t}{2}} = \frac{2}{e^t}$$

En conclusion, $\boxed{\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[,\ |g(x,t)| \leqslant \frac{2}{e^t}.}$

b)
- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car cosinus l'est.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue donc continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- La fonction $\varphi(t) = \dfrac{2}{e^t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (fonction du type $t \mapsto e^{\alpha t}$) et

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\qquad |g(x,t)| \leqslant \varphi(t)$$

Donc, d'après le théorème de continuité sous le signe somme, la fonction ψ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) Soit $X \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $X \neq -1$, la somme des termes d'une suite géométrique s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{N} (-X)^k = \frac{1-(-X)^{N+1}}{1-(-X)} = \frac{1}{1+X} - \frac{(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1+X}$$

En conclusion, $\boxed{\forall X \in \mathbb{R} - \{-1\}\ \forall N \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{1+X} = \left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k\right) + \frac{(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1+X}}$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. La formule de la question 2)a), avec $X = e^{-2t}$ (> 0 donc $\neq -1$), s'écrit

$$\frac{1}{1+e^{-2t}} = \left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k (e^{-2t})^k\right) + \frac{(-1)^{N+1}(e^{-2t})^{N+1}}{1+(e^{-2t})}$$

Donc $\dfrac{1}{\text{ch } t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} = \dfrac{2e^{-t}}{1+e^{-2t}} = 2e^{-t}\left[\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} (-1)^k e^{-2kt}\right) + \dfrac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]$

c) En remplaçant $\dfrac{1}{\text{ch } t}$ par la formule trouvée en 2)b) dans l'expression de ψ, on trouve que, pour tout réel x et tout entier naturel strictement positif N

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \psi(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt) \left[\left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k e^{-2kt}\right) + \frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right] \mathrm{d}t}$$

3) a) Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $e^{-2t} \geqslant 0$ et $e^{-t} \leqslant 1$ donc

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\qquad |h(x,t)| = \left|\frac{e^{-t}\cos(xt)}{1+e^{-2t}}\right| \leqslant \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}} \leqslant 1$$

$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est bornée par 1 sur } \mathbb{R} \times [0,+\infty[.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la majoration trouvée en 3)a),

$$\forall t \in [0,+\infty[\quad \forall N \in \mathbb{N}^* \qquad \left|e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right| = |h(x,t)|e^{-2(N+1)t} \leqslant e^{-2(N+1)t}$$

Or $t \mapsto e^{-2(N+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc $R_N(x)$ existe et l'inégalité s'écrit :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \qquad |R_N(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left| e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}} \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2(N+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(N+1)}$$

Or $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{2(N+1)} = 0$, donc en conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{N\to+\infty} R_N(x) = 0.}$

4) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés.

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\cos(xt)e^{-(2k+1)t} = 0$ donc, au voisinage de $+\infty$, $|\cos(xt)e^{-(2k+1)t}| = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et est intégrable.

Passons par les complexes : $\cos(xt) = \Re\left(e^{ixt}\right)$. Par linéarité de l'intégrale,

$$J_k(x) = \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1+ix)t}\,\mathrm{d}t\right) = \Re\left[-\frac{1}{2k+1+ix}e^{-(2k+1+ix)t}\right]_0^{+\infty} = \Re\left(\frac{1}{2k+1+ix}\right)$$

En Conclusion, $\boxed{J_k(x) = \dfrac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}.}$

(On pouvait aussi faire deux intégrations par parties.)

5) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 2)c), $\psi(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k e^{-t}\cos(xt)e^{-2kt}\right) + e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]\mathrm{d}t.$

Or chacun des termes de cette somme est intégrable (questions 3)b) et 4)), donc en utilisant la linéarité de l'intégrale, il vient

$$\psi(x) = 2\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^k J_k(x)\right) + 2R_N(x) = \left(\sum_{k=0}^{N} 2(-1)^k\frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}\right) + 2R_N(x)$$

Or, d'après 3)b), $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N(x) = 0$, donc la série $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} 2(-1)^k\frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\psi(x)$.

En résumé, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} u_k(x) \text{ avec } u_k(x) = 2(-1)^k\dfrac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}.}$