

Devoir de Mathématiques numéro 2

Exercice 1

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

1) **a)** Montrer que f est une fonction impaire dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f . Montrer qu'il existe une fonction polynôme p_n, dont on précisera le degré, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\exp(-x^2)$$

c) Que peut-on dire de la parité de p_n ?

d) Démontrer que f admet une limite finie en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite). Dans toute la suite du problème, on note Δ cette limite.

2) **a)** Montrer que, au voisinage de 0, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + o\Big(x^{2N+1}\Big)$.

b) En déduire $p_n(0)$.

3) Pour tout entier naturel n, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

b) Calculer W_0 et W_1 et justifier que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

d) En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{2}$.

e) Montrer que la suite (W_n) est décroissante et que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$.

f) Justifier alors que $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

4) **Calcul de Δ**

a) Montrer que pour tout réel u, on a $\mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$.

b) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\begin{cases} (1-u)^n \leqslant \mathrm{e}^{-nu} & \text{si} \quad u \leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-nu} \leqslant \dfrac{1}{(1+u)^n} & \text{si} \quad u > -1 \end{cases}$$

c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$W_{2n+1} \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leqslant W_{2n-2}.$$

Calculer Δ.

Exercice 2

On considère l'application ψ définie pour tout réel x par

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\ t}\,\mathrm{d}t$$

1) **a)** On considère la fonction $g : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\ t}$.

Montrer que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, $|g(x,t)| \leqslant \dfrac{2}{e^t}$.

b) *(pour les 5/2)* ψ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? (on énoncera le théorème utilisé)

2) **a)** Montrer que, pour tout réel X et tout entier naturel strictement positif N

$$\frac{1}{1+X} = \left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k\right) + \frac{(-1)^{N+1}X^{N+1}}{1+X}$$

b) En déduire que, pour tout réel t et tout entier naturel strictement positif N

$$\frac{1}{\mathrm{ch}\ t} = 2e^{-t}\left[\left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k e^{-2kt}\right) + \frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]$$

c) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel strictement positif N

$$\psi(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\left[\left(\sum_{k=0}^{N} (-1)^k e^{-2kt}\right) + \frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\right]\mathrm{d}t$$

Dans ce qui suit, on notera

$$R_N(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)\frac{(-1)^{N+1}e^{-2(N+1)t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t$$

3) **a)** Montrer que la fonction $h : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x,t) = \dfrac{e^{-t}\cos(xt)}{1+e^{-2t}}$ est bornée sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la limite de $R_N(x)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

4) N désignant un entier naturel non nul, calculer, pour tout entier k de $[0, N]$

$$J_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)e^{-2kt}\,\mathrm{d}t$$

5) Montrer que, pour tout réel x, $\psi(x)$ peut s'exprimer comme la somme d'une série

$$\psi(x) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k(x)$$

et donner, pour tout entier k ; une expression de $u_k(x)$.